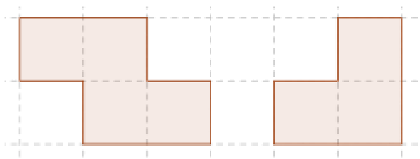
Problema săptămânii 21.

Un dreptunghi $(2m-1) \times (2n-1)$, unde m, $n \geq 4$ sunt numere naturale, trebuie pavat cu dale de următoarele două tipuri:

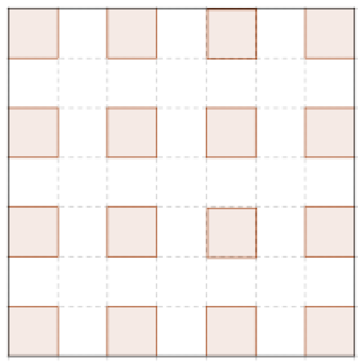


(Liniile punctate împart dalele în pătrăţele 1×1.) Dalele pot fi rotite şi simetrizate. Fiecare dală trebie să acopere exact 3 sau 4 dintre pătrăţelele 1×1 ale dreptunghiului, fiecare pătrat 1×1 fiind acoperit de exact o dală, iar dalele nu se pot suprapune şi nici depăşi suprafaţa dreptunghiului.

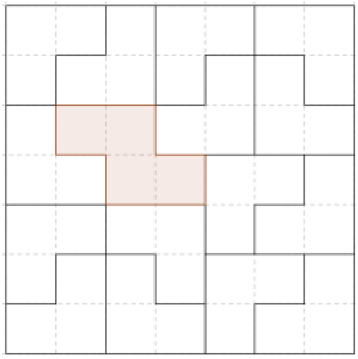
Care este numărul minim de dale necesar pavării dreptunghiului?

Concursul Putnam 2016, problema A4

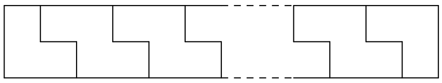
Soluţie:
Numerotăm liniile dreptunghiului de la 1 la $2m-1$ şi coloanele tablei de la 1 la $2n-1$.
Colorăm pătrăţelele aflate pe linii impare şi coloane impare ca în figura de mai jos.



Orice dală va acoperi cel mult un pătrăţel colorat. Sunt mn asemenea pătrăţele, deci este nevoie de cel puţin mn dale.
Să arătăm acum că un dreptunghi $(2m-1) \times (2n-1)$, m, $n \geq 4$, poate fi pavat cu mn asemenea dale.
Pentru $m = n = 4$ (dreptunghiul este în acest caz un pătrat 7×7), o posibilă pavare este cea indicată mai jos.



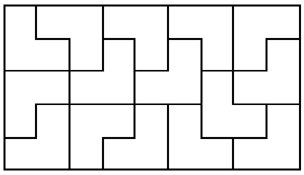
(Această pavare nu este unică, dar orice altă pavare trebuie să folosească o dală de primul tip şi 15 dale de tipul II. Într-adevăr, folosind a dale de primul tip şi b dale de tipul II, trebuie să avem $a + b = 16$ şi aria acoperită de dale este $49 = 4a + 3b$. De aici rezultă imediat că $a = 1$ şi $b = 15$.)
Revenind la tabla $(2m - 1) \times (2n - 1)$, o descompunem în $m - 4$ dreptunghiuri $2 \times (2n - 1)$, un pătrat 7×7 şi $n - 4$ dreptunghiuri 7×2.
Am văzut cum putem pava pătratul 7×7 cu 16 dale.
Putem pava orice dreptunghi $2 \times (2k - 1)$ sau $(2k - 1) \times 2$ cu k dale ca mai jos:



Astfel, vom obţine o pavare a dreptunghiului $(2m - 1) \times (2n - 1)$ cu $(m - 4) \cdot n + 16 + (n - 4) \cdot 4 = mn$ dale.
În concluzie, am demonstrat că, pe de-o parte, pentru pavare avem nevoie de cel puţin mn dale şi că, pe de altă parte, acest număr de dale este suficient. Aşadar minimul căutat este mn.

Comentariu: Ne-am putea pune problema: ce se întâmplă dacă dreptunghiul are (cel puţin) o dimensiune mai mică decât 7?
Evident, pentru $m = 1$ dreptunghiul $(2m-1) \times (2n-1)$ nu poate fi pavat. Pentru $m = 3$, colorarea de mai sus arată că ar trebui să avem cel puţin $2n$ dale în pavare, dar aceste dale ar acoperi (în total) cel puţin $6n$ pătrăţele, ori dreptunghiul are numai $6n - 3$. Aşadar şi pentru un dreptunghi $3 \times (2n - 1)$ pavarea este imposibilă.
În fine, pentru dreptunghiul $5 \times (2n - 1)$, argumentul cu colorarea arată că avem nevoie de cel puţin $3n$ dale. Acestea ocupă minim $9n$ pătrăţele, deci trebuie ca aria dreptunghiului să fie cel puţin $9n$. Din $5(2n - 1) \geq 9n$ rezultă că $n \geq 5$. Aşadar nici dreptunghiurile 5×5 şi 5×7 nu pot fi pavate.

Acelaşi calcul arată că un dreptunghi 5×9 ar trebui pavat folosind numai dale de tipul II, lucru posibil după cum se vede din figura de mai jos:



Am văzut că orice dreptunghi 5×2 poate fi pavat cu 3 dale. Descompunând dreptunghiul $5 \times (2n-1)$ $(n \geq 5)$ într-un dreptunghi 5×9 şi $n-5$ dreptunghiuri 5×2, obţinem pentru acest dreptunghi o pavare cu $15 + 3(n-5) = 3n$ dale. Aşadar răspunsul „mn" este valabil în toate cazurile în care pavarea este posibilă.

O problemă asemănătoare apare pe ShL JBMO 2010.