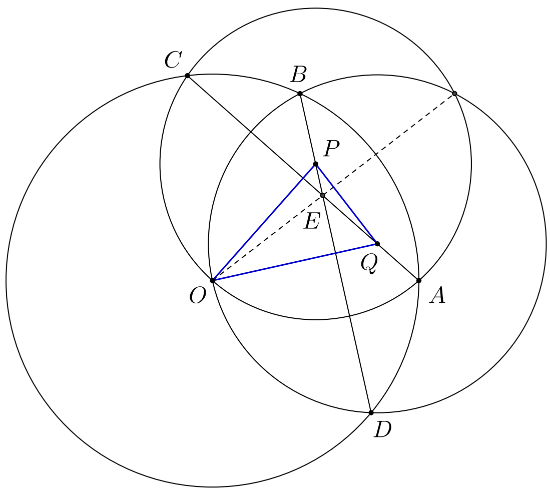
Problema săptămânii 20.

Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc de centru O. Diagonalele AC şi BD nu trec prin O. Dacă centrul cercului circumscris triunghiului AOC se află pe dreapta BD, demonstraţi că centrul cercului circumscris triunghiului BOD se află pe dreapta AC.

Soluţia 1:
Dacă P şi Q sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOC, respectiv BOD, iar E este punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului $ABCD$, atunci E este centrul radical al celor trei cercuri (intersecţia celor trei axe radicale). Cum axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe linia centrelor, avem că $BD \perp OQ$, $OE \perp PQ$ şi $AC \perp PO$. Cum $P \in BD$, avem $PE \perp OQ$ şi $OE \perp PQ$, deci F este ortocentrul triunghiului POQ. Rezultă că punctul Q se află pe perpendicuara din E pe OP, adică pe AC.



Soluţia 2:
Inversiunea în raport cu cercul de centru O transformă cercul circumscris triunghiului AOC în dreapta AC şi dreapta BD în cercul circumscris triunghiului BOD. Atunci, cu notaţiile de la Soluţia 1, avem că $Q \in AC \Leftrightarrow AC \perp \odot(BOD) \Leftrightarrow \odot(AOC) \perp BD \Leftrightarrow P \in BD$. (Unghiul dintre o dreaptă şi un cerc care se intersectează este unghiul ascuţit sau drept dintre dreaptă şi tangenta într-unul din punctele de intersecţie dintre dreaptă şi cerc. Inversiunea păstrează unghiurile, deci păstrează perpendicularitatea.)

Soluţia 3:
Se poate folosi următoarea lemă:

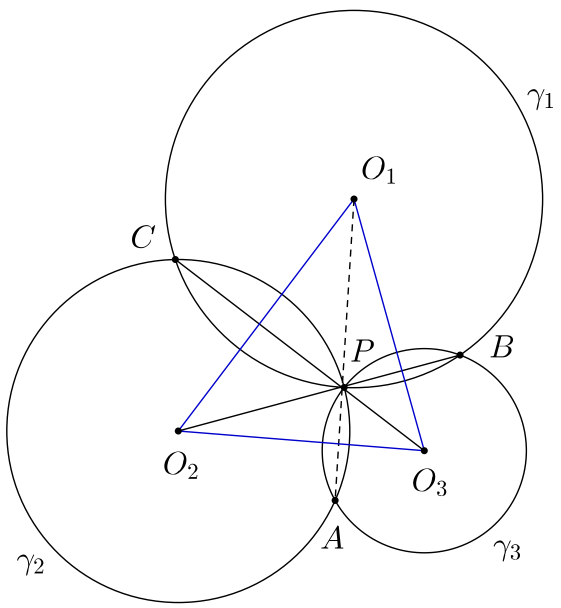
Dacă $\mathscr{C}$ este un cerc fix, iar P este un punct fix diferit de centrul cercului, iar dreapta variabilă d care trece prin P (dar nu şi prin O) intersectează cercul în punctele B şi D, atunci locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului OBD este inclus într-o dreaptă (perpendiculară pe OP).

O problemă asemănătoare
s-a dat luna trecută (decembrie 2016) la un test la Centrul de Excelenţă din Timişoara:

Problema 3. Fie γ_1, γ_2 şi γ_3 trei cercuri care au un punct comun P şi se mai intersectează în punctele $A \in \gamma_2 \cap \gamma_3$, $B \in \gamma_3 \cap \gamma_1$ şi $C \in \gamma_1 \cap \gamma_2$. Dacă dreapta BP trece prin centrul cercului γ_2 şi dreapta CP trece prin centrul cercului γ_3, arătaţi că dreapta AP trece prin centrul cercului γ_1.

Mihai Chiş

Soluţie:
Fie O_1, O_2 şi O_3 centrele cercurilor γ_1, γ_2 şi respectiv γ_3.
Cum $O_1O_2 \perp PC$, $O_1O_3 \perp PB$, $O_3 \in PC$ şi $O_2 \in PB$, P este punctul de intersecţie a înălţimilor din O_2 şi O_3 în triunghiul $O_1O_2O_3$, deci este ortocentrul acestui triunghi. Rezultă că $O_1P \perp O_2O_3$. Cum şi $AP \perp O_2O_3$, rezultă că punctele A, P şi O_1 sunt coliniare.



O generalizare a celor două probleme:

Fie γ_1, γ_2 şi γ_3 trei cercuri având centrele O_1, O_2 şi respectiv O_3, necoliniare. Dacă O_1 se află pe axa radicală a cercurilor γ_2 şi γ_3, iar O_2 se află pe axa radicală a cercurilor γ_1 şi γ_3, atunci O_3 se află pe axa radicală a cercurilor γ_1 şi γ_2.

Demonstraţia este analoagă cu cele ale cazurilor particulare prezentate mai sus.