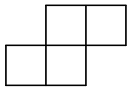
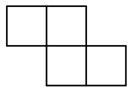
PROBLEMA SĂPTĂMÂNII 2

Fie k un număr natural nenul. Determinaţi numărul maxim de dale având forma



sau



formate din patru pătrăţele care se pot aşeza pe o tablă $(2k+1)\times(2k+1)$ astfel încât dalele să nu se suprapună şi să nu depăşească suprafaţa tablei. Dalele pot fi rotite.
Soluţie:
Răspunsul este k^2.
Să arătăm mai întâi că putem plasa k^2 dale pe tablă. Împărţim tabla în k benzi dreptunghiulare, $2\times(2k+1)$, o bandă $1\times(2k+1)$ rămânând nefolosită. Pe fiecare bandă putem plasa câte k dale aşezate în aceeaşi poziţie. În total, vom aşeza aşadar k^2 dale.

Acum arătăm că nu putem plasa mai mult de k^2 dale pe tablă. Scriem alternativ $0,1,0,1,\ldots,0$ în pătratele din rândurile impare şi tot alternativ numerele $2,3,2,3,\ldots,2$ în pătratele din rândurile pare. Observăm că oricare dală am folosi şi în orice poziţie am plasa-o, ea ocupă exact o cifră de fiecare fel. Cum există doar k^2 pătrate cu numărul 3, putem plasa cel mult k^2 dale.

Comentarii:
Această problemă este una de evaluare-exemplu: trebuie ghicit rezultatul R, demonstrată o *estimare* de tipul ,,mai mult de R nu se poate", apoi dat un *exemplu* care să arate că rezultatul R chiar este posibil.
Un capitol întreg dedicat acestui tip de probleme, inclusiv un caz particular al acestei probleme, găsiţi în cursul meu de combinatorică (vezi secţiunea omonimă, paragraful de teorie).

Apoi, aceasta este o problemă de colorare. Fie din arii, fie colorând în tablă de şah, se vede uşor că putem pune cel mult k^2+k piese, dar încercând să dăm exemplu, nu pare să meargă. Colorarea în tablă de şah are marele avantaj că putem spune ceva precis: indiferent cum vine plasată o dală, ea ocupă două pătrăţele albe şi două negre. Dar informaţia, deşi precisă, este insuficientă. O informaţie mai bună obţinem colorând rândurile alternativ, începând şi terminând cu rânduri negre. Rămâne adevărat că orice dală va avea două pătrăţele albe şi două negre. De astă dată există o mare diferenţă între numărul pătrăţelelor albe de pe tablă şi al celor negre. Totuşi, nici această diferenţă nu este suficientă: sunt $k(2k+1)$ pătrăţele albe. Cum fiecare dală are două, putem avea cel mult $k^2+\left[\frac{k}{2}\right]$ dale. Dar avem

exemplu doar pentru k^2 dale pe tablă.
Dimensiunea impară a tablei este cea care sugerează colorarea cu 4 culori $(0, 1, 2, 3)$ din soluţia de mai sus. Avem $(k+1)^2$ pătrăţele cu numărul 0, $k(k+1)$ cu numărul 1, tot atâtea cu numărul 2 şi k^2 cu numărul 3.

Sigur, am fi putut economisi vopsea: colorând numai pătrăţelele aflate pe linii pare şi coloane pare (cele marcate cu 3 în soluţie), constatăm că am colorat k^2 pătrăţele şi că fiecare dală ocupă exact unul colorat, deci putem avea cel mult k^2 dale.
Alte probleme pe aceeaşi idee găsiţi tot în cursul meu de combinatorică.