Problema săptămânii 19.

Naomi şi Tom joacă un joc în care Naomi mută prima. Ei aleg alternativ câte un număr natural de la 1 la 100 pe care niciunul dintre ei nu l-a ales anterior. Un jucător pierde dacă, după rândul lui, suma numerelor alese de cei doi jucători nu se scrie ca diferenţă de pătrate perfecte. Stabiliţi dacă vreunul din jucători are strategie câştigătoare şi dacă da, care?

Olimpiadă Marea Britanie, turul 1, 2016-2017

Comentarii:
Problema a fost dată pe 2 decembrie în cadrul ,,Round 1" a BMO.
Subiectele le găsiţi la adresa https://bmos.ukmt.org.uk/home/bmo1-2017.pdf
Părerea mea este că merită studiate. Vă recomand mai ales ultimele trei probleme.
Timp de o lună, filmuleţe cu comentarii asupra soluţiilor sunt disponibile la adresa: https://bmos.ukmt.org.uk/solutions/bmo1-2017/
Dacă stăpâniţi limba engleză, vi le recomand cu căldură, chiar dacă soluţiile problemelor 3 şi 6 nu mi se par cele mai naturale.
Pentru cei care nu stăpânesc limba engleză, urmează prezentarea a două soluţii preluate din materialul video, apoi a unei a treia soluţii care nu apare acolo.

Preliminarii:
Teoremă: Un număr se scrie ca diferenţă de pătrate perfecte dacă şi numai dacă nu dă restul 2 la împărţirea cu 4.

Demonstraţie:
Orice număr impar $2k+1$ se scrie $(k+1)^2 - k^2$.
Orice multiplu de 4, $4k$, se scrie $(k+1)^2 - (k-1)^2$.
Numerele de forma $4k+2$ nu se scru ca diferenţă de pătrate pentru că $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, dacă este par, atunci numerele a şi b au aceeaşi paritate, deci ambele paranteze sunt pare, prin urmare $a^2 - b^2$ este divizibil cu 4.

În concluzie: un jucător pierde dacă lasă o sumă de forma $4k+2$.

O a doua observaţie importantă: cineva trebuie să aibă strategie câştigătoare pentru că cineva pierde. În cel mai rău caz după efectuarea a 100 de mutări, suma este de forma $4k+2$. Într-adevăr, $1+2+\ldots+100 = 5050$ dă rest 2 la împărţirea cu 4.

Soluţia 1:
Primul jucător (Naomi) are strategie câştigătoare. La început ea alege un număr divizibil cu 4. Strategia ei este să facă mereu ca suma să fie un multiplu de 4. Dacă al doilea jucător alege un număr de forma $4k+1$, ea alege un număr de forma $4k+3$ şi invers. Deoarece sunt câte 25 de aceste forme (adică la fel de multe), dacă Tom poate alege un asemenea număr, atunci şi Naomi are replică. Dacă Tom alege un număr de forma $4k$, atunci şi Naomi alege un număr de aceeaşi formă (după

alegerea iniţială a lui Naomi, au rămas 24 de numere de această formă, deci, dacă Tom poate alege un număr de această formă, atunci şi Naomi poate răspunde cu ,,aceeaşi monedă”). În fine, dacă Tom alege un număr de forma $4k+2$, el (tocmai) pierde pentru că face suma să fie de forma $4k+2$. Prin urmare, Naomi poate mereu muta astfel ca suma numerelor alese să fie multiplu de 4, adică diferenţă de pătrate şi, deoarece în baza observaţiei de mai sus, cineva trebuie să piardă până la urmă, Tom va pierde.

Solutia 2:
Naomi câştigă, alegând numere astfel ca suma numerelor alese să fie mereu multiplu de 100. Astfel, la început ea alege numărul 100, după care strategia ei este ca dacă Tom alege numărul n, ea să aleagă numărul $100-n$. Să observăm că dacă vreodată Tom alege numărul 50 el tocmai pierde (deci numărul $100-n$ ales de Naomi va fi mereu diferit de numărul n ales de Tom). În plus, nu se poate ca numărul $100-n$ pe care ar trebui să-l aleagă Naomi să fi fost ales anterior pentru că atunci şi n ar fi fost ales anterior şi deci Tom nu ar fi putut alege numărul n. În concluzie, Naomi are mereu mutare bună, deci cel care pierde va fi Tom.

Soluţia 3:
Naomi câştigă pentru că ... nu pierde, iar cineva pierde, deci acel cineva este Tom. Într-adevăr, câtă vreme Naomi are la dispoziţie numere care fac parte din clase de resturi diferite modulo 4, ea poate alege mereu un număr potrivit.
Să presupunem că Naomi ar urma la mutare într-un moment în care nu mai sunt disponibile decât numere care dau restul r la împărţirea cu 4. Fiind rândul lui Naomi, mai există un număr par de numere nealese, să zicem $2j$. Suma acestora este $2jr \pmod 4$, deci suma lăsată de Tom este $5050-2jr \pmod 4$. Această sumă fiind pară, dacă Tom nu a pierdut, înseamnă că ea este divizibilă cu 4, deci j şi r sunt impare. Prin urmare, suma lăsată de Naomi va fi impară (deci diferenţă de pătrate) - adică, dacă Tom ajunge s-o forţeze pe Naomi să facă mutări de un anume fel (modulo 4), mutările ei sunt în mod cert bune. Cu alte cuvinte: Naomi ori are de ales, ori este forţată să facă o mutare ,,bună”.