Problema săptămânii 18.

Demonstraţi că pentru orice numere naturale nenule a, b, există A şi B naturale astfel încât numerele $an + A$ şi $bn + B$ să fie prime între ele pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie:
Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Atunci există a' şi b', prime între ele, astfel ca $a = da'$ şi $b = db'$. Din identitatea lui Bézout rezultă că există A şi B naturale astfel ca $a'B - b'A = 1$. Evident, şi numerele A, B vor fi prime între ele. Aceste numere, A şi B, satisfac proprietatea din enunţ.
Într-adevăr, dacă ar exista un număr natural n pentru care numerele $an+A$ şi $bn+B$ să aibă un divizor comun $m > 1$, atunci m ar divide şi $a'(bn + B) - b'(an + A) = a'b'dn + a'B - b'a'dn - b'A = 1$, contradicţie.

Observaţii:
Numerele A şi B din rezolvarea de mai sus pot fi găsite explicit cu algoritmul lui Euclid extins.
Afirmaţia din enunţ este adevărată şi în cazul $ab = 0$.