Problema săptămânii 17.

Arătaţi că dacă numerele reale pozitive x_1, x_2, $\ldots$, x_n au suma $\dfrac{1}{2}$, atunci ele satisfac inegalitatea

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{3}\,.$$

Olimpiadă Leningrad, 1988

Soluţie:
Dacă notăm $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, atunci să observăm că $f(x)\cdot f(y)\geq f(x+y)$, $\forall\, x,y\geq 0$.
Într-adevăr, inegalitatea

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\geq\frac{1-x-y}{1+x+y}$$

revine după eliminarea numitorilor la

$$(1-x-y+xy)(1+x+y)\geq(1-x-y)(1+x+y+xy),$$

apoi la $xy(2x+2y)\geq 0$, ceea ce este evident.

Prin inducţie rezultă atunci imediat că

$$f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n)\geq f(x_1+x_2+\ldots+x_n),\quad \forall\, x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0.$$

Dacă $x_1+x_2+\ldots+x_n=\dfrac{1}{2}$, folsind că $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$, inegalitatea de mai sus devine tocmai cea din enunţ.

Egalitate avem dacă $n-1$ dintre variabile sunt egale cu 0, iar una este egală cu $\dfrac{1}{2}$.

Să observăm că au loc şi afirmaţiile:

1) Dacă numerele reale pozitive x_1, x_2, $\ldots$, x_n au suma $\dfrac{1}{3}$, atunci ele satisfac inegalitatea

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n}\geq\frac{1}{2}\,.$$

2) Dacă numerele x_1, x_2, $\ldots$, $x_n\in(0,1)$ satisfac egalitatea

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}+\frac{1-x_2}{1+x_2}+\ldots+\frac{1-x_n}{1+x_n}=\frac{1}{2}\,,$$

atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq \dfrac{1}{3}$.

3) Dacă numerele $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in (0,1)$ satisfac egalitatea

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} + \frac{1-x_2}{1+x_2} + \ldots + \frac{1-x_n}{1+x_n} = \frac{1}{3}\,,$$

atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Motivul este că funcţia $f : (0,1) \longrightarrow (0,1),\ f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, este o involuţie, adică verifică $f\big(f(x)\big) = x$, $\forall\, x \in (0,1)$, adică satisface echivalenţa

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

pentru orice $x, y \in (0,1)$.

BIBLIOGRAFIE

http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/AnInequality.shtml