Problema săptămânii 15.

2^n pietricele sunt grupate în câteva grămezi. Putem efectua următoarea operaţie: alegem două grămezi, una cu a pietrecele şi una cu b pietricele, apoi, dacă $a \geq b$, mutăm b pietricele din prima grămadă în cea de-a doua. Arătaţi că, repetând operaţia de un număr convenabil de ori, putem aduna toate pietricelele într-o singură grămadă.

Soluţia 1:
Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după n.
Cazurile $n = 0$ şi $n = 1$ sunt triviale.
Presupunem afirmaţia adevărată pentru 2^n pietricele şi o demonstrăm pentru 2^{n+1} pietricele.
Să observăm mai întâi că există un număr par de grămezi (posibil 0) care conţin un număr impar de pietricele. Putem grupa aceste grămezi în perechi. În cadrul fiecărei perechi efectuăm operaţia. După efectuarea câte unei operaţii în fiecare pereche de asemenea grămezi, vom ajunge la situaţia în care fiecare grămadă va conţine un număr par de pietricele. Astfel, în fiecare grămadă, putem grupa pietricelele în perechi. Lipim pietricelele care fac parte din aceeaşi pereche. Vom obţine astfel 2^n pietricele (mai mari), împărţite în grămezi. Din ipoteza de inducţie ştim că putem regrupa pietricelele acestea într-o singură grămadă, ceea ce înseamnă că putem regrupa pietricelele iniţiale într-o singură grămadă (o operaţie la nivelul pietricelelor mai mari este de fapt o operaţie la nivelul pietricelelor mici).

Soluţia 2: (*Radu Popescu*)
Considerăm m grămezi şi notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ numărul de pietricele din fiecare grămadă.
Reordonând eventual grămezile, putem presupune $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$. În plus, avem $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 2^n$.
Procedeul propus pentru reducerea la o singură grămadă este următorul:
O ,,etapă" constă din următorii $m - 1$ paşi:
- Aplicăm operaţia grămezilor cu a_1 şi a_2 pietricele care astfel vor avea $2a_1$, respectiv $a_2 - a_1$ pietricele.
- Deoarece $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \Rightarrow 0 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_1 \leq a_3$, putem aplica operaţia pentru grămada cu $a_2 - a_1$ pietricele obţinută la pasul anterior şi cea cu a_3 pietricele. După efectuarea operaţiei obţinem $2(a_2 - a_1)$ pietricele în prima grămadă şi $a_3 - a_2 + a_1$ în cea de-a doua (lucru valabil şi dacă $a_2 - a_1 = 0$, caz în care, de fapt, la acest pas nu facem nicio operaţie).
- La pasul k ($2 \leq k \leq m$) aplicăm operaţia grămezii cu $a_k - a_{k-1} + a_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}a_1$ obţinute în urma pasului anterior şi grămezii cu a_{k+1} pietricele.

După efectuarea fiecărei etape, reordonăm grămezile în ordinea crescătoare a numărului de pietricele, renunţând la eventualele grămezi cu 0 pietricele. Vom avea, iarăşi, $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_p$, cu $p \leq m$, şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 2^n$. Repetăm ,,etapa"

(cei $p-1$ paşi).
Să demonstrăm că acest procedeu asigură strângerea tuturor pietricelelor într-o singură grămadă.
Fie k_{min} cea mai mică valoare pentru care 2^k divide toate numerele a_1, a_2, $\ldots$, a_p $(p>1)$ înainte de aplicarea unei etape. Atunci primele $p-1$ numere obţinute prin aplicarea etapei sunt de forma $2x$, unde x sunt numere divizibile cu $2^{k_{min}}$, deci numerele obţinute vor fi numere divizibile cu $2^{k_{min}+1}$. Deoarece şi numărul total de pietricele, 2^n, este divizibil cu $2^{k_{min}+1}$, rezultă că şi numărul de pietricele din ultima grămadă este divizibil cu $2^{k_{min}+1}$. Aşadar, după fiecare etapă k_{min} creşte cu cel puţin 1, deci după cel mult n etape procedeul se sfârşeşte. Pe de altă parte, procedeul descris mai sus continuă atâta timp cât mai sunt cel puţin două grămezi, deci el se sfârşeşte atunci când toate pietricelele ajung într-o singură grămadă.