Problema săptămânii 14.

Spunem că un număr natural $n \geq 2$ este *bun* dacă numerele naturale nenule se pot colora cu n culori astfel încât culorile numerelor $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ na$ să fie distincte două câte două pentru orice număr natural nenul a.
a) Arătaţi că 2 şi 3 sunt numere bune.
b) Arătaţi că dacă $n+1$ este număr prim, atunci n este bun.
c) Arătaţi că dacă $2n+1$ este număr prim, atunci n este bun.
d) Arătaţi că 7 este bun.

Remarcă: Problema determinării tuturor numerelor bune este o problemă deschisă. Cel mai mic număr despre care nu se ştie dacă este bun sau nu este 195.

Soluţie şi comentarii:

a) Pentru a arăta că $n = 2$ este bun, putem colora numerele astfel: reprezentăm orice număr natural nenul sub forma $2^m \cdot k$, cu k impar. (Reprezentarea este unică.) Colorăm cu o culoare numerele care au exponentul lui 2 număr par şi cu cealaltă culoare numerele care au exponentul lui 2 impar. Dacă $a = 2^m \cdot k$, atunci $2a = 2^{m+1} \cdot k$. Cum numerele m şi $m+1$ au parităţi diferite, a şi $2a$ vor avea culori diferite.

O altă colorare posibilă pentru $n = 2$: reprezentăm numerele naturale sub forma $3^m \cdot p$, cu $(p, 3) = 1$. Din nou, reprezentarea este unică. Colorăm cu o culoare numerele care au $p \equiv 1 \pmod 3$ şi cu cealaltă culoare numerele care au $p \equiv 2 \pmod 3$. (Cum $(p, 3) = 1$, orice număr va fi colorat cu una din cele două culori.) Este uşor de văzut că dacă $a = 3^m \cdot p$, cu $(p, 3) = 1$, atunci $2a = 3^m \cdot 2p$ şi, cum p şi $2p$ dau resturi diferite la împărţirea cu 3, numerele a şi $2a$ au culori diferite.

În general, se pot colora arbitrar numerele impare cu două culori, apoi numărul $2^m \cdot k$ va fi colorat cu culoarea lui k dacă m este par şi cu culoarea diferită de cea a lui k dacă m este impar.

Să arătăm acum că $n = 3$ este bun. Reprezentăm orice număr sub forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m$, cu $\alpha, \beta, m \in \mathbb{N}$, $(m, 6) = 1$. Folosim culoarea 1 pentru numerele de forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m$ cu $\alpha - \beta \equiv 2 \pmod 3$, coloarea 2 pentru numerele de forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m$ cu $\alpha - \beta \equiv 1 \pmod 3$ şi culoarea 3 pentru numerele de forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m$ cu $\alpha - \beta \equiv 0 \pmod 3$. (Ideea este: atunci când înmulţesc un a cu 2 şi cu 3, mă interesează exponenţii lui 2 şi ai lui 3 în descompunerile numerelor a, $2a$ şi $3a$. Uitându-mă la exponenţi, trebuie să colorez perechile de numere naturale astfel încât perechile (α, β), $(\alpha+1,\ \beta)$ şi $(\alpha,\ \beta+1)$ să fie colorate diferit.)

Încă un exemplu: pentru $n = 4$ putem:

• reprezenta numerele sub forma $5^m \cdot p$, cu $(p, 5) = 1$ şi colora numerele în funcţie de restul împărţirii lui p la 5 (restul nu poate fi 0, deci vom avea nevoie de 4 culori), sau
• reprezentăm numerele sub forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot m$ şi le colorăm în funcţie de restul împărţirii lui $\alpha - \beta$ la 4.

b)[1] Fie $p = n + 1$. Din ipoteză, p este număr prim. Putem colora numerele astfel: orice număr natural nenul N se scrie în mod unic sub forma $N = p^k \cdot q$, unde $q,\ k \in \mathbb{N}$, $(q, p) = 1$. Vom colora numărul $N = p^k \cdot q$ cu culoarea cu numărul c, unde c este restul împărţirii lui q la p, $c \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$.
Vom demonstra că această colorare satisface condiţia din enunţ. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că numerele $a,\ 2a,\ \ldots,\ (p-1)a$ sunt colorate cu $p - 1$ culori diferite. Dacă $a = p^k \cdot q$, unde $q,\ k \in \mathbb{N}$, $(q, p) = 1$, atunci, pentru $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $ja = p^k \cdot jq$, iar $(jq, p) = 1$. Vom arăta că numerele jq dau resturi diferite la împărţirea prin p.
Într-adevăr, dacă $j_1 \cdot q$ şi $j_2 \cdot q$, $1 \leq j_1 < j_2 \leq p - 1$, dau acelaşi rest la împărţirea cu p, atunci $p \mid (j_2 - j_1)q$. Dar $(p, q) = 1$, iar $0 < j_2 - j_1 < p$, deci presupunerea făcută duce la contradicţie.
În concluzie, cu colorarea făcută, numerele $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ ,\ (p-1)a$ au culori diferite pentru orice a.

c) Fie $p = 2n + 1$. Din ipoteză, p este număr prim. Putem colora numerele astfel: orice număr natural nenul N se scrie în mod unic sub forma $N = p^k \cdot q$, unde $q,\ k \in \mathbb{N}$, $(q, p) = 1$. Vom colora numărul $N = p^k \cdot q$ cu culoarea cu numărul $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde c este fie restul împărţirii lui q la p (dacă q dă un rest $\leq n$ la împărţirea la p), fie restul împărţirii lui $p - q$ la p (dacă q dă un rest $> n$ la împărţirea la p).
Vom demonstra că această colorare satisface condiţia din enunţ. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că numerele $a,\ 2a,\ \ldots,\ na$ sunt colorate cu n culori diferite. Dacă $a = p^k \cdot q$, unde $q,\ k \in \mathbb{N}$, $(q, p) = 1$, atunci, pentru $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $ja = p^k \cdot jq$, iar $(jq, p) = 1$. Vom arăta că numerele $a,\ 2a,\ \ldots\ ,\ na$ au culori diferite. Într-adevăr, dacă $j_1 \cdot a$ şi $j_2 \cdot a$, $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq n$, ar avea aceeaşi culoare, atunci fie $j_1 q$ şi $j_2 q$ dau acelaşi rest la împărţirea cu p, fie $j_1 q$ şi $p - j_2 q$ dau acelaşi rest la împărţirea cu p, adică fie $p \mid (j_2 - j_1)q$, fie $p \mid (j_2 + j_1)q$. Dar $(p, q) = 1$, iar $-p < j_2 \pm j_1 < p$ şi $j_2 \pm j_2 \neq 0$, deci presupunerea făcută duce la contradicţie.
În concluzie, cu colorarea făcută, numerele $a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ ,\ na$ au culori diferite pentru orice a, adică n este număr bun.

d)[2] Reprezentăm orice număr natural nenul a sub forma $a = 2^x\, 3^y\, 5^z\, 7^w \cdot b$, unde $x,\ y,\ z,\ w,\ b$ sunt numere naturale, iar b nu este divizibil cu niciunul din numerele prime 2, 3, 5 şi 7. Vom colora numărul a în funcţie de restul împărţirii la 7 al expresiei $2x + 3y + z + 6w$. Astfel, am colorat toate numerele naturale nenule cu câte una

[1] Enunţul a fost preluat din revista KöMaL, aprilie, 2010.
[2] Enunţul şi soluţia au fost preluate din revista KöMaL, aprilie, 2010.

din ,,culorile” $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Această colorare satisface condiţiile din enunţ pentru că, dacă $s = 2x + 3y + z + 6w$, atunci numerele a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, $6a$, $7a$, vor avea culoarea dată de resturile împărţirii la 7 a numerelor s, $s+2$, $s+3$, $s+4$, $s+1$, $s+5$, respectiv $s + 6$. Aceste 7 numere dau resturi diferite la împărţirea cu 7, deci vor fi colorate cu 7 culori diferite.

Notă: Astfel de colorări, bazate pe restul împărţirii la 7 a unei combinaţii ,,potrivite” a exponenţilor factorilor primi mai mici sau egali cu n, au putut fi găsite în fiecare caz particular, dar o formă generală a acestora nu a putut fi găsită. Am văzut că pentru $n = 3$ şi $n = 4$ exponenţii ,,relevanţi” sunt cei ai factorilor primi 2 şi 3, notaţi α şi β şi că acea combinaţie ,,potrivită” a putut fi aleasă, atât pentru $n = 3$ cât şi pentru $n = 4$, $s = \alpha - \beta$. Pentru $n = 7$ au contat exponenţii numerelor prime 2, 3, 5 şi 7, iar combinaţia lor ,,potrivită” a fost $s = 2x+3y+z+6w$.

Diverse comentarii suplimentare legate de această problemă găsiţi aici:
http://mathoverflow.net/questions/26358/can-we-color-z-with-n-colors-such-that-a-2a-na-all-have-different-color