Problema săptămânii 13.

Fie a, b, c numere reale pozitive. Determinaţi toate soluţiile reale (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2. \end{cases}$$

Olimpiada Balcanică de Matematică, 1984

Soluţia 1:
Adunând cele trei ecuaţii, obţinem $2(ax+by+cz) = 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, adică $ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$. De aici, scăzând din această relaţie, pe rând, fiecare din ecuaţiile din enunţ, ajungem la:

$$\begin{aligned} ax = (x-y)(x-z) \quad &\Rightarrow \quad ax(z-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ by = (y-z)(y-x) \quad &\Rightarrow \quad by(x-z) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ cz = (z-x)(z-y) \quad &\Rightarrow \quad cz(y-x) = (x-y)(y-z)(z-x). \end{aligned}$$

Notând $P = (x-y)(y-z)(z-x)$, obţinem $x(z-y) = \dfrac{P}{a}$ şi analoagele. Adunându-le, ajungem la $P\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = 0$, deci $P = 0$.
Dacă, de exemplu, $x - y = 0$, din relaţiile de mai sus obţinem $x = 0$ şi $y = 0$, apoi din ecuaţiile din enunţ că $z \in \{0, c\}$. Obţinem soluţiile $(0, 0, 0)$ şi $(0, 0, c)$.
În mod similar, în celelalte cazuri, se mai obţin soluţile $(a, 0, 0)$ şi $(0, b, 0)$.

Soluţia 2:
Putem presupune $x \le y \le z$. Din ecuaţiile $ax = (x-y)(x-z)$, $by = (y-z)(y-x)$ şi $cz = (z-x)(z-y)$ care se deduc ca mai sus, obţinem că $ax \ge 0$, $by \le 0$ şi $cz \ge 0$. Cum a, b, c sunt numere pozitive, deducem că $0 \le x \le y \le 0$. Rezultă că $x = y = 0$ şi că fie $z = 0$, fie $z = c$. Considerând şi celelalte ordini posibile ale numerelor x, y, z, obţinem celelalte soluţii.

Soluţia 3:
Sistemul format din ecuaţiile $ax = (x-y)(x-z)$, $by = (y-z)(y-x)$ şi $cz = (z-x)(z-y)$ poate fi rezolvat cu ceva perseverenţă: să notăm $u = x-z$ şi $v = y-z$.

Atunci sistemul devine $\begin{cases} az = u\,(u - v - a) \\ bz = v\,(v - u - b) \\ cz = uv \end{cases} \qquad (*)$

Analizăm patru cazuri.

Cazul 1. $u = v = 0$. Din $(*)$ rezultă $x = y = z = 0$, obţinându-se soluţia $(0, 0, 0)$.

Cazul 2. $u = 0$ şi $v \neq 0$. Deducem imediat $x = z = 0$, iar cea de-a doua ecuaţie din $(*)$ devine $v - u - b = 0$, de unde $y = b$. Obţinem astfel soluţia $(0, b, 0)$.

Cazul 3. $u \neq 0$ şi $v = 0$. Ca în cazul precedent obţinem soluţia $(a, 0, 0)$.

Cazul 4. $u \neq 0$ şi $v \neq 0$. Din sistem rezultă

$$\frac{a}{c} = \frac{u - v - a}{v}$$

şi

$$\frac{b}{c} = \frac{v - u - b}{u}.$$

Aceste egalităţi conduc la sistemul:

$$\begin{cases} cu - (a + c)\,v = ac \\ (b + c)\,u - cv = -bc \end{cases}$$

Obţinem $u = v = -c$, deci $z = c$ şi $x = y = 0$. Astfel obţinem şi ultima soluţie, $(0, 0, c)$.

Soluţile au fost preluate de pe AoPS:
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h145341p822805