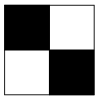
Problema săptămânii 12.

Determinaţi numărul minim de pătraţele negre care rămân vizibile dacă acoperim o suprafaţă pătrată $n \times n$ cu bucăţi pătrate 2×2 de hârtie ca cele din figură (care pot fi şi rotite), astfel ca fiecare pătrat al pătratului $n \times n$ să fi fost acoperit cel puţin o dată.



Soluţie:

Răspunsul este n.

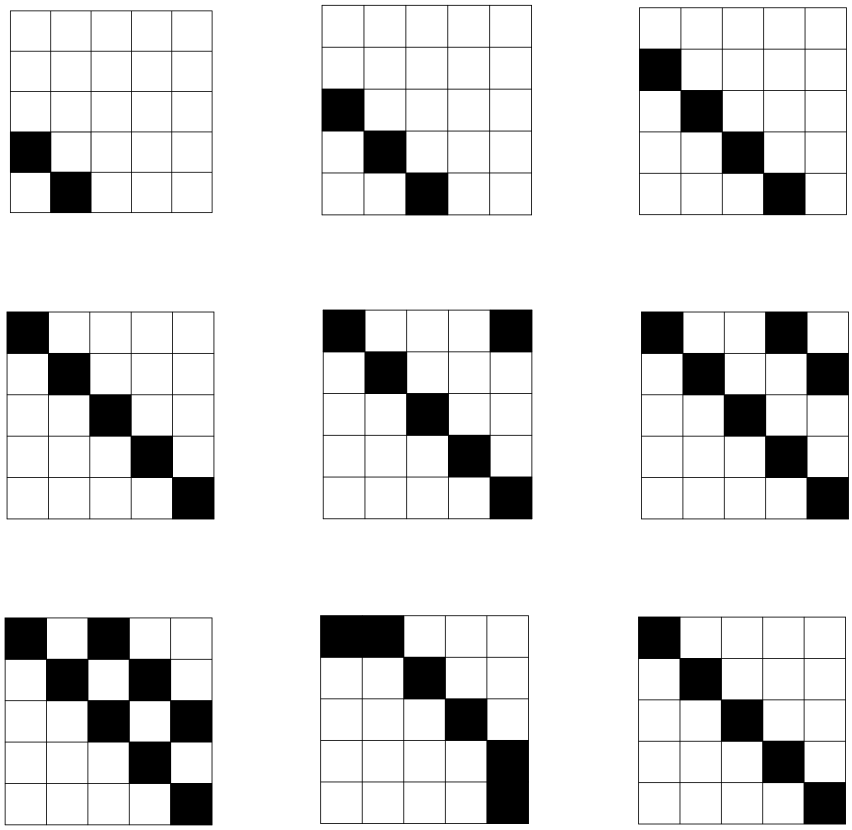
Vom dovedi mai întâi că oricum am plasa bucăţi de hârtie care să acopere tabla $n \times n$, vor rămâne vizibile cel puţin n pătrate negre (aceasta este partea de evaluare).

Indiferent de cum plasăm bucăţile de hârtie, pe fiecare coloană va rămâne la final cel puţin un pătrat negru. Într-adevăr, ultima bucată de hârtie plasată pe această coloană are vizible cele două pătrăţele ale ei care au fost plasate pe această coloană, iar unul dintre aceste două pătrăţele este negru. Aşadar întotdeauna vor fi vizibile cel puţin n pătrăţele negre, câte unul pe fiecare coloană.

Vom da acum un exemplu, o cale de a obţine pe tablă exact n pătrăţele negre. (Pe pagina următoare se poate vedea evoluţia suprafeţei tablei în cazul $n = 5$.)

- Mai întâi punem o bucată de hârtie în colţul din stânga-jos al tablei.
- Apoi punem două bucăţi astfel încât cele două să acopere cu partea lor albă pătraţelele negre ale bucăţii plasate în colţ. Vom obţine o ,,minidiagonală" formată din trei pătrăţele negre.
- În continuare, vom plasa trei bucăţi de hârtie care să acopere cu alb ,,minidiagonala" neagră rezultată în urma etapei precedente. Se va forma o ,,minidiagonală" formată din patru pătrăţele negre.
- Continuăm procedeul până când se formează o diagonală neagră de lungime n (unind colţurile din stânga-sus şi dreapta-jos).
- Acum procedăm simetric începând din colţul din dreapta sus, producând ,,minidiagonale" tot mai lungi, paralele cu cea deja neagră. La final, plasând din nou bucăţi de hârtie de-a lungul diagonalei amintite, facem ca toate pătrăţelele care nu sunt pe această diagonală să devină albe.

Vom ilustra paşii care conduc la exemplul de mai sus pe tabla 5×5. Vom avea succesiv configuraţiile:



O altă idee:
Se poate construi exemplul şi inductiv: se poate arăta, prin inducţie după $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, că pornind de la orice tablă $m \times m$, se poate obţine o tablă complet acoperită cu hârtie şi care are pătrăţele negre numai pe diagonala care uneşte colţul din stânga-sus cu cel din dreapta-jos.
Dacă dispunem de asemenea ,,*m-mutări*" (succesiune de mutări pe tabla $m \times m$ care lasă numai o diagonală neagră) şi de o tablă $(m+1) \times (m+1)$, făcând succesiv patru *m-mutări* în ordine în pătratele $m \times m$ din colţurile din stânga-jos, dreapta-sus, stânga-sus şi dreapta-sus, obţinem o suprafaţă $(m + 1) \times (m + 1)$ care are pătrăţele negre numai pe diagonala ce uneşte colţurile din stânga-sus şi dreapta-jos, adică o $(m + 1)$-*mutare*.

Generalizare: (*Vlad Vergelea*)

Concluzia rămâne valabilă şi dacă în locul bucăţilor de hârtie 2×2 se folosesc bucăţi $k \times k$ (cu $k \leq n$) care au cele k pătrăţele de pe una din diagonale colorate cu negru, iar celelalte pătrăţele albe. Demonstraţia este analoagă.