

### Problema săptămânii 11.

Fie  $ABC$  un triunghi echilateral înscris în cercul  $\mathcal{C}$  de centru  $O$ ,  $T$  un punct al arcului mic  $\widehat{BC}$  al acestui cerc, iar  $\mathcal{C}'$  un cerc care este tangent exterior cercului  $\mathcal{C}$  în punctul  $T$ . Dacă  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$ , cu  $A', B', C' \in \mathcal{C}'$ , sunt tangente la cercul  $\mathcal{C}'$ , arătați că are loc relația  $AA' = BB' + CC'$ .

**Remarcă:** Nu vă prezint în acest fișier vreo demonstrație (o demonstrație elegantă precum și alte observații interesante găsiți în materialul domnului *Mihai Miculița* postat tot aici). Am folosit problema ca pretext pentru a vă atrage atenția asupra *Teoremei lui Casey*, o generalizare a unei cunoscute relații a lui *Ptolemeu*.

**Teorema lui Casey.** Dacă cercurile  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$  sunt tangente interior unui cerc  $\mathcal{C}$  (punctele de tangență fiind în această ordine pe cerc), atunci are loc relația

$$d_{12} \cdot d_{34} + d_{14} \cdot d_{23} = d_{13} \cdot d_{24},$$

unde  $d_{ij}$  reprezintă lungimea tangentei comune exterioare la cercurile  $\mathcal{C}_i$  și  $\mathcal{C}_j$ .

Rezultatul rămâne valabil și dacă cercurile sunt tangente exterior, sau dacă unele din cercurile  $\mathcal{C}_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  se reduc la un punct.

Rezultatul se poate extinde și la cazul în care unele cercuri sunt tangente interior iar altele exterior definind  $d_{ij}$  ca fiind lungimea tangentei comune exterioare dacă cercurile  $\mathcal{C}_i$  și  $\mathcal{C}_j$  sunt ambele tangente interior sau ambele tangente exterior cercului  $\mathcal{C}$ , respectiv lungimea tangentei comune interioare în cazul în care unul dintre cercurile  $\mathcal{C}_i$  și  $\mathcal{C}_j$  este tangent interior, iar celălalt tangent exterior cercului  $\mathcal{C}$ .

În articolele de mai jos găsiți multe aplicații ale acestei teoreme, printre care *Teorema lui Feuerbach* - Cercul lui Euler este tangent atât cercului înscris, cât și fiecăruia din cele trei cercuri exînscrie.

*Marius Drăgușin* – Despre utilitatea unui rezultat prea puțin folosit: Teoremele lui Casey, GM 12/1995, pag. 716-721

*Neculai Roman* – Asupra unor probleme date la O.I.M., Gazeta Matematică

*Marius Pachțariu* – Câteva aplicații ale teoremei lui Casey, Recreații Matematice (vezi secțiunea de materiale teoretice de geometrie)

[https://www.math.ust.hk/excalibur/v16\\_n5.pdf](https://www.math.ust.hk/excalibur/v16_n5.pdf)

[http://geometry.ru/articles/Luis\\_Casey.pdf](http://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf) (autor Luis González)