Problema săptămânii 10.

Dacă n este un număr natural mai mare ca 2, scriem toate numerele naturale mai mici decât n şi prime cu n în ordine crescătoare: $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, apoi formăm sumele:[1]

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m.$$

Câte din aceste sume sunt divizibile cu n dacă:
a) n este un număr prim impar?
b) n este pătratul unui număr prim impar?
c) n este o putere nenulă a unui număr prim impar?

Soluţie:
Răspunsul la ambele întrebări este 1.
a) Dacă n este prim, atunci $m = n - 1$ şi $a_k = k$, $\forall\, k = \overline{1, m}$, $s_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ este divizibil cu n dacă şi numai dacă $k = n - 1$, deci există o singură sumă diviziblă cu n.
b) Dacă $n = p^2$, numerele relativ prime cu n sunt cele nedivizibile cu p. Aranjăm numerele mai mici ca n, prime cu n într-un tabel de forma

$$\begin{array}{rrcr}
1, & 2, & \ldots, & p-1, \\
p+1, & p+2, & \ldots, & p+p-1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p(p-1)+1, & p(p-1)+2, & \ldots, & p(p-1)+p-1.
\end{array}$$

Este uşor de văzut că suma numerelor din fiecare rând al tabelului este divizibilă cu p şi că nicio sumă parţială a unei linii (având drept termeni primele $k < p - 1$ numere de pe linie) nu este divizibilă cu p. Astfel, singurele sume care sunt divizibile cu p sunt cele care conţin numai linii complete. Suma numerelor din primele k linii este $k \cdot \dfrac{p(p-1)}{2} + \dfrac{k(k-1)}{2} \cdot p(p-1) = k^2 \cdot \dfrac{p(p-1)}{2}$, care este divizibilă cu p^2 dacă şi numai dacă $p \mid k^2$, adică $p \mid k$, ceea ce se întâmplă numai dacă $k = p$, adică numai atunci când adunăm toate numerele din tabel.
c) Dacă $n = p^j$, aranjăm numerele relativ prime cu n într-un tabel similar cu cel de mai sus (cu p^{j-1} linii). Pentru ca o sumă parţială să fie divizibilă cu p trebuie, ca mai sus, să luăm rânduri întregi. Suma numerelor din primele k rânduri este tot $k^2 \cdot \dfrac{p(p-1)}{2}$ şi este divizibilă cu $n = p^j$ dacă şi numai dacă $p^{j-1} \mid k^2$. Notând $i = \left\lfloor \dfrac{j}{2} \right\rfloor$, condiţia precedentă revine la $p^i \mid k$. Convin următoarele valori ale lui k: p^i, $2p^i$, $\ldots$, $p^{j-i-1} \cdot p^i$, adică p^{j-i-1} valori, sau p^α valori, unde $\alpha = \left\lfloor \dfrac{j-1}{2} \right\rfloor$.

[1] Desigur, $m = \varphi(n)$, unde φ este indicatorul lui Euler.

Comentarii

Ne putem pune problema generală, aceea de a determina pentru un număr natural nenul oarecare n, numărul sumelor divizibile cu n.

Putem afla uşor răspunsul în numeroase cazuri particulare, dar oare se poate da un răspuns în cazul general?

Pentru $n = 1$, $s_1 = 1$, deci avem o sumă ,,bună".

Pentru $n = 2$ avem doar $s_1 = 1$ care nu este divizibilă cu 2.

$n = 2$ este singurul număr natural nenul pentru care această sumă este 0.

Într-adevăr, dacă $n > 2$, atunci $(k, n) = 1 \Leftrightarrow (n - k,\ n) = 1$ arată că dacă k apare printre termenii sumei, atunci şi $n - k$ apare. Cum $\dfrac{n}{2}$ nu apare (nu este prim cu n dacă $n > 2$), putem grupa termenii sumei în perechi cu suma n. Suma acestor perechi va fi divizibilă cu n, deci $s_{\varphi(n)}$ (suma toată) este o sumă ,,bună".

Pentru $n = 2p$, cu $p > 2$ număr prim, termenii sunt $1, 3, 5, \ldots, p-2, p+2, \ldots,\ 2p-1$. Sumele de forma $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ cu $2n - 1 < p$ sunt egale cu n^2 şi nu sunt divizibile cu p, iar sumele $1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ cu $2n - 1 > p$ sunt egale cu $n^2 - p$ şi sunt divizibile cu p numai dacă $n = p$. Prin urmare, pentru aceste numere avem o singură sumă ,,bună".

Pentru puterile lui 2 (mai mari decât 2), avem o singură sumă bună.