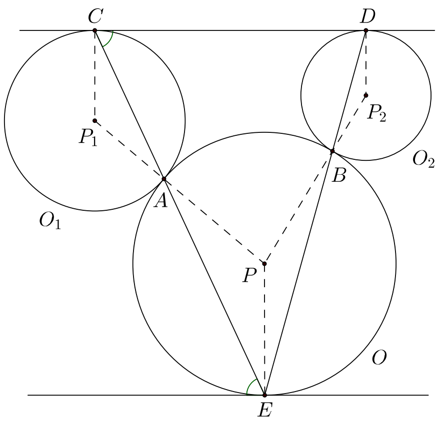
PROBLEMA SĂPTĂMÂNII 1

Teorema Mickey Mouse
Fie O_1 şi O_2 două cercuri tangente exterior unui cerc O, punctele de tangenţă fiind A, respectiv B. Fie C şi D puncte pe O_1, respectiv O_2 astfel încât dreapta CD este o tangentă comună exterioară a celor două cercuri. Dacă $\{E\} = AC \cap BD$, atunci $E \in O$ şi tangenta în E la O este paralelă cu CD.

Soluţie
Fie P_1, P_2 şi P centrele cercurilor O_1, O_2, respectiv O, $\{E_1\} = AC \cap O$ şi $\{E_2\} = BD \cap O$. Atunci P_1A şi PA sunt perpendiculare pe tangenta comună în A la cercurile O_1 şi O, deci P_1, A, P sunt coliniare. Atunci triunghiurile isoscele P_1AC şi PAE_1 sunt isoscele cu unghiurile de la bază $\sphericalangle P_1AC$ şi PAE_1 congruente. Atunci tangenta în E_1 la O face cu dreapta AC un unghi de măsură $90° - m(\sphericalangle PE_1A) = 90° - m(\sphericalangle P_1CA) = m(\sphericalangle DCA)$, deci este paralelă cu CD. Prin urmare, E_1 este acel punct de pe arcul mare AB în care tangenta la O este paralelă cu CD. Analog se arată că E_2 este acel punct de pe arcul mare AB în care tangenta la O este paralelă cu CD. Rezultă că punctele E_1 şi E_2 coincid, de unde concluzia.



Comentariu.
Ce este de fapt în spatele problemei?
Să notăm cu R_1, R_2 şi R razele cercurilor O_1, O_2, respectiv O.
Omotetia (interioară), de raport $\dfrac{R_1}{R}$, dintre cercurile O_1 şi O are centrul în A şi duce punctul C într-un punct E_1. Tangenta în C la O_1 (adică CD) este dusă prin această omotetie într-o dreaptă paralelă cu CD, tangentă la O în E_1. Analog, omotetia de raport $\dfrac{R_2}{R}$, dintre cercurile O_1 şi O are centrul în B şi duce punctul D într-un punct E_2. Tangenta în D la O_2, CD, este dusă prin această omotetie într-o dreaptă paralelă cu CD, tangentă la O în E_2. De aici rezultă că E_1 coincide

cu E_2.
Şi mai scurt: dacă ne aranjăm ca tangenta CD să fie ,,orizontală", iar punctele C şi D să fie ,,polurile nord" ale cercurilor O_1 şi O_2, cele două omotetii duc aceste puncte în ,,polul sud" al cercului O (în care tangenta este tot orizontală).

Remarcă.
Din cele de mai sus rezultă uşor că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil şi de aici că E este pe axa radicală a cercurilor O_1 şi O_2.

Mai multe despre omotetia dintre două cercuri şi despre omotetie în general puteţi citi de exemplu:

• în revista Mathematical Excalibur
https://www.math.ust.hk/excalibur/v9_n4.pdf

• în cartea
Ionuţ Onişor – *Transformări geometrice. Omotetia şi inversiunea*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2009
în colecţia *Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice din România*
(mai ales pentru cei familiarizaţi cu noţiunea de ,,vector")