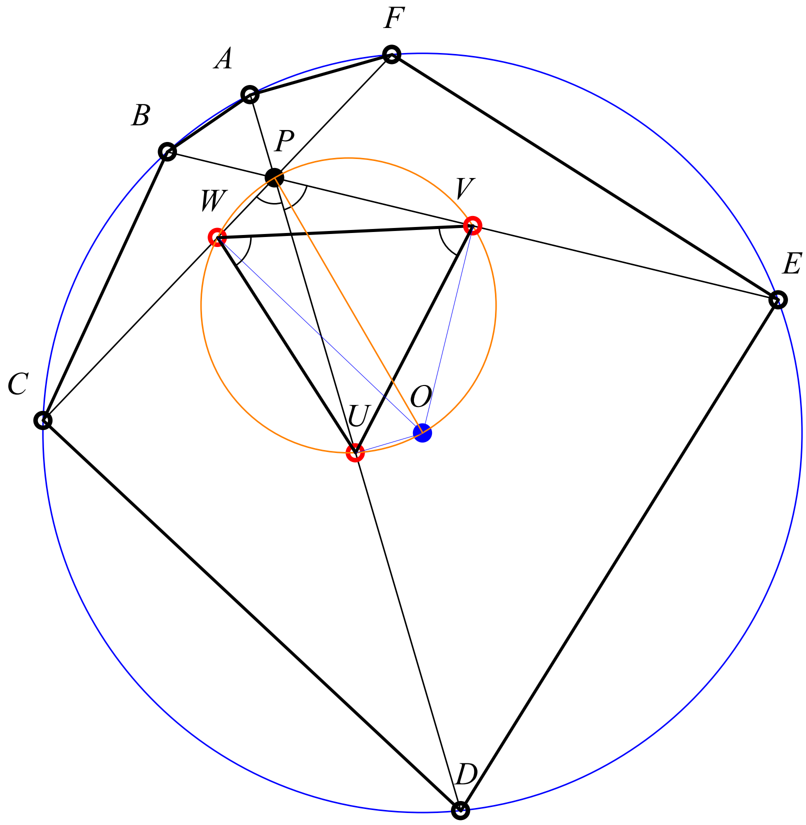
Problema 302:

Fie $ABCDEF$ **un hexagon inscriptibil, înscris într-un cerc având centrul** O, **având proprietatea că:** $[AD]\cap[BE]\cap[CF]=\{P\}$ **şi** $m\left(\widehat{CPD}\right)=m\left(\widehat{DPE}\right)=60^0$. **Arătaţi că, are loc relaţia:** $|PA|+|PC|+|PE|=|PB|+|PD|+|PF|$.



SOLUŢIE (*M.Miculiţa*): Dacă U,V şi W – sunt mijloacele diagonalelor $[AD],[BE]$ şi respectiv $[CF]$ (diagonalele determinate de vârfurile opuse), atunci întrucât:

$$\left.\begin{array}{l}|UA|=|UD|\Rightarrow OU\perp UP\\ |VB|=|VE|\Rightarrow OV\perp PV\\ |CW|=|WF|\Rightarrow OW\perp PW\end{array}\right\}\Rightarrow O,\boxed{P\in\odot UVW;\quad(1)}\Rightarrow PWUV-inscriptibil\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m\left(\widehat{WVU}\right)=m\left(\widehat{WPU}\right)=60^0\\ m\left(\widehat{VWU}\right)=m\left(\widehat{VPU}\right)=60^0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\Delta UVW-echilateral.\quad(2)}$$

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă că are loc: $\boxed{|PU|=|PV|+|PW|;\quad(3)}$ (rel.lui SCHOOTEN).

Ţinând acum de relaţia (3), avem:

$$|PA|+|PC|+|PE|=\left(|AU|-\cancel{|PU|}\right)+\left(\cancel{|PW|}+|CW|\right)+\left(\cancel{|PV|}+|VE|\right)=|AU|+|CW|+|VE|=$$

$$=\frac{1}{2}.(|AD|+|CF|+|BE|)\Rightarrow\boxed{|PA|+|PC|+|PE|=\frac{1}{2}.(|AD|+|CF|+|BE|)};\quad(4)$$

şi:

$$|PB|+|PD|+|PF|=\left(|BV|-\cancel{|PV|}\right)+\left(\cancel{|PU|}+|UD|\right)+\left(|WF|-\cancel{|PW|}\right)=|BV|+|UD|+|WF|=$$

$$=\frac{1}{2}.(|AD|+|CF|+|BE|)\Rightarrow\boxed{|PA|+|PC|+|PE|=\frac{1}{2}.(|AD|+|CF|+|BE|)}.\quad(5)$$

În fine, din relaţiile (4) şi (5), obţinem că: $\boxed{|PA|+|PC|+|PE|=|PB|+|PD|+|PF|}$.■