**Problema 223 (*Aplicație a teoremei lui Schooten*):**

Fie $ABC-$ un triunghi echilateral înscris în cercul $(O;R)$ și $T-$ un punct al arcului "mic" $\overset{\frown}{BC}$ al acestui cerc; iar $(O';R')$ un cerc care este tangent exterior la cercul $(O;R)$. Notăm cu $A', B'$ și $C'-$ punctele de tangență ale tangentelor duse din punctele $A, B$ și respectiv $C$ la cercul $(O';r')$. Arătați că are loc relația: $|AA'|=|BB'|+|CC'|$. **(v.Fig.1)**

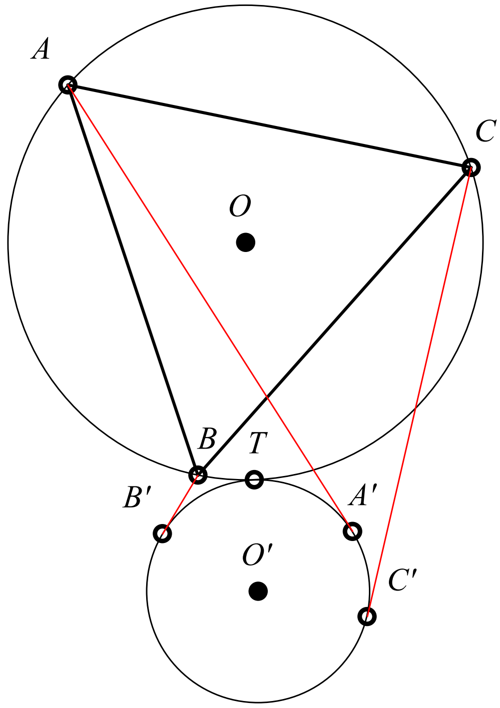


**Fig.1.**

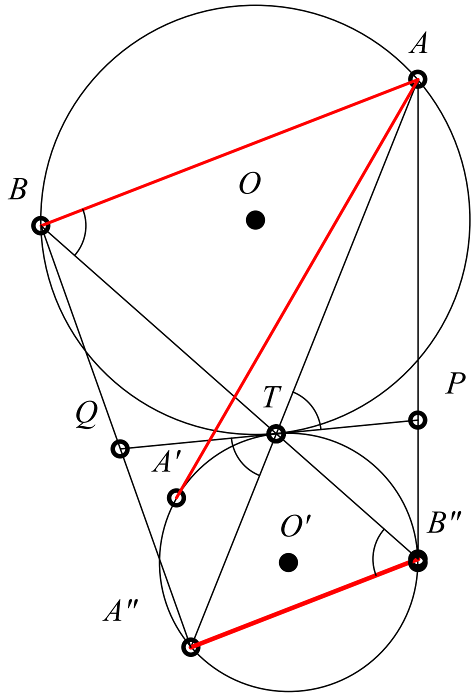


**Fig.2.**

**SOLUȚIE (*Mihai Miculița*):**

Notăm cu $X''-$cel de al doilea punct de intersecție al dreptei $TX$ cu cercul $(O';r')$, unde: $X \in \{A,B,C\}$; iar cu $P$ și $Q-$punctele de intersecție ale tangentei commune a cercurilor

$(O;R)$ și $(O';R')$ în punctul lor comun $T$, cu dreptele $AB''$ și $BA''$, avem (v.Fig.2):

$$\left.\begin{array}{l} PQ\cap\odot(O;R)=\{T\}\Rightarrow \widehat{ABT}\equiv\widehat{ATP} \\ [PQ]\cap[AA'']=\{T\}\Rightarrow \widehat{ATP}\equiv\widehat{QTA''} \\ PQ\cap\odot(O';R')=\{T\}\Rightarrow \widehat{QTA''}\equiv\widehat{TB''A''} \end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ABT}\equiv\widehat{TB''A''}\Rightarrow AB\parallel A''B''\Rightarrow\frac{|AT|}{|AA''|}=\frac{|BT|}{|BB''|}. \quad (1)$$

În mod analog se arată că: $\dfrac{|AT|}{|AA''|}=\dfrac{|CT|}{|CC''|}$. (2)

Din relațiile (1) și (2), urmează că:

$$\frac{|AA''|}{|AT|}=\frac{|BB''|}{|BT|}=\frac{|CC''|}{|CT|}=k^2\Rightarrow\begin{cases}|AA''|=k^2.|AT|;\\ |BB''|=k^2.|BT|; \quad (3)\\ |CC''|=k^2.|CT|.\end{cases}$$

Ținând acum seama de relațiile (3) și notând cu $\rho(A)-$puterea punctului $A$ față de cercul $(O';R')$, avem: $\rho(A)=|AA'|^2=|AT|.|AA''|=k^2.|AT|^2\Rightarrow\boxed{|AA'|=k.|AT|}$. (4)

În mod analog se arată că:

$$\boxed{|BB'|=k.|BT|};\quad (5) \text{ și } \boxed{|CC'|=k.|CT|}. \quad (6)$$

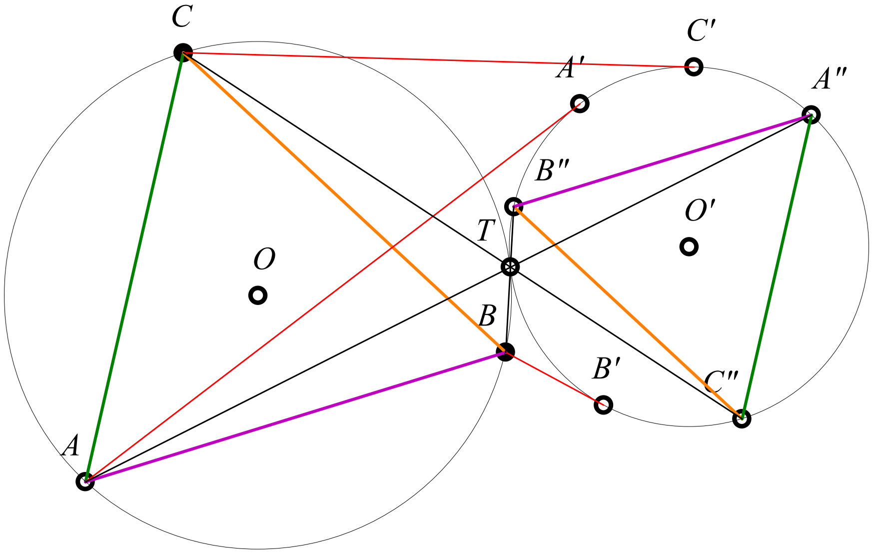


**Fig.3.**

Pe de altă parte, în virtutea teoremei lui SCHOOTEN (v.Fig.3), avem:

$$|AT| = |BT| + |CT|. \quad (7)$$

În fine, ținând acum seama de relațiile (4), (5), (6) şi (7), avem:

$$|AT| = |BT| + |CT| \,\|.k \Rightarrow \boxed{|AA'| = |BB'| + |CC'|}.\blacksquare$$

**OBSERVAȚII FINALE:**

**1).** Întrucât: $A''B'' \parallel AB$, $A''C'' \parallel AC$ şi $B''C'' \parallel BC \Rightarrow \Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ şi cum $\Delta ABC$ – este echilateral, rezultă că si $\Delta A''B''C''$ este echilateral! Aşa că aplicâna acum teorema lui Schooten în cercul $(O';R')$ la $\Delta A''B''C''$ şi punctul $T$, obținem: $|TA''| = |TB''| + |TC''|$. (8)

În fine, adunând acum relațiile (7) şi (8), obținem că are loc relația: $\boxed{|AA''| = |BB''| + |CC''|}$.

**2).** Atât concluzia problemei date, cât şi relația din observația **1).** au loc şi în cazul în care cercul $(O';R')$ este tangent interior la cercul $(O;R)$ (v.Fig.4).

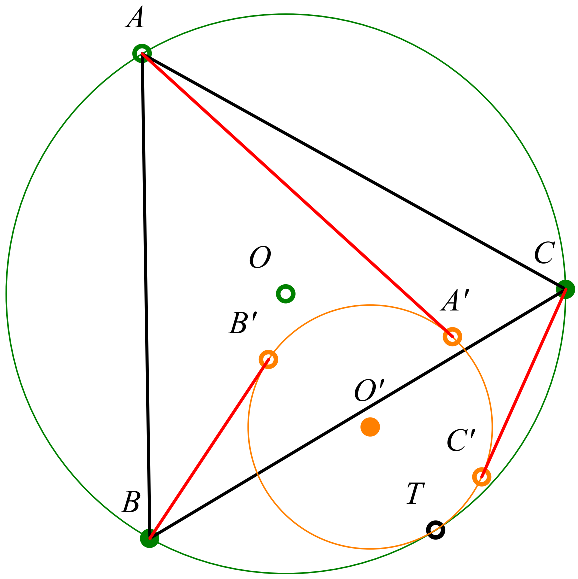


**Fig.4.**