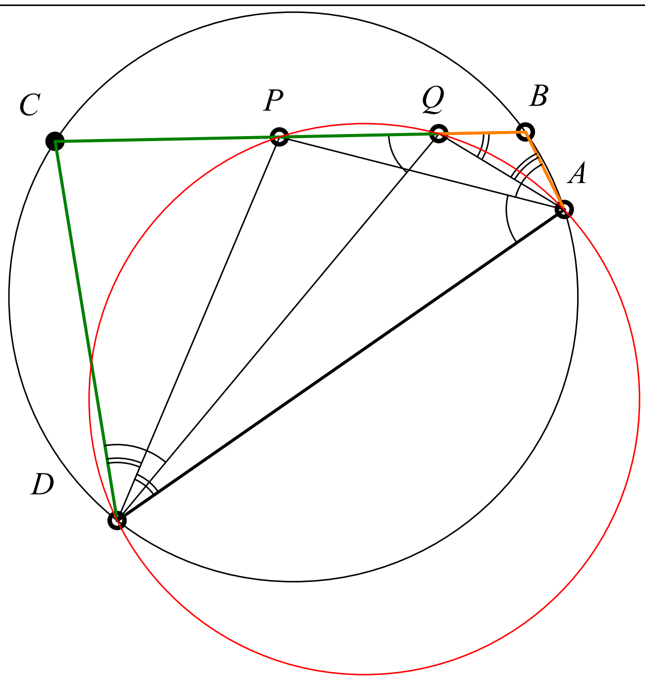
Problema săptămânii a 7-a:

Fie $ABCD$ – un patrulater inscriptibil având proprietatea că bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAD}$ şi $\widehat{ADC}$ se intersectează într-un punct $P \in [BC]$. Arătaţi că: $|BC| = |AB| + |CD|$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu Q – cel de al doilea punct de intersecţie a dreptei BC cu cercul circumscris triunghiului PAD (v.Fig); avem:

$$ADPQ - inscriptibil \Rightarrow \widehat{CQD} \equiv \widehat{PAD} \equiv \widehat{PAB} \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{CQD}\right)} = m\left(\widehat{PAD}\right) = m\left(\widehat{PAB}\right) = \boxed{\frac{A}{2}}. \quad (1)$$

Pe de altă parte, avem: $ABCD - inscriptibil \Rightarrow C = 180^0 - A$; (2)

Aşa că, ţinând seama de relaţia (1) şi (2), din triunghiul QCD obţinem:

$$\boxed{m\left(\widehat{QDC}\right)} = 180^0 - \left[m\left(\widehat{CQD}\right) + C\right] = 180^0 - \left(\frac{A}{2} + C\right) = \left(180^0 - C\right) - \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} = \boxed{\frac{A}{2}}. \quad (3)$$

Din relaţiile (1) şi (3), rezultă că: $\widehat{CQD} \equiv \widehat{QDC} \Rightarrow |CD| = |QC|$. (4)

În mod analog arătăm că: $|AB| = |QB|$. (5)

În fine, adunând acum relaţiile (4) şi (5), membru cu membru, obţinem că:

$$\boxed{|AB| + |CD|} = |QB| + |QC| = \boxed{|BC|}. \blacksquare$$