India-ONM-2017, Problemă 5:

Fie ABC – un triunghi neisoscel şi dreptunghic în A; iar D – piciorul înălţimii duse din vârful A. Notăm cu I, J şi cu K – centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD şi respectiv ACD. Arătaţi că punctul I – este ortocentrul triunghiului AJK şi $|JK| = |AJ|$.

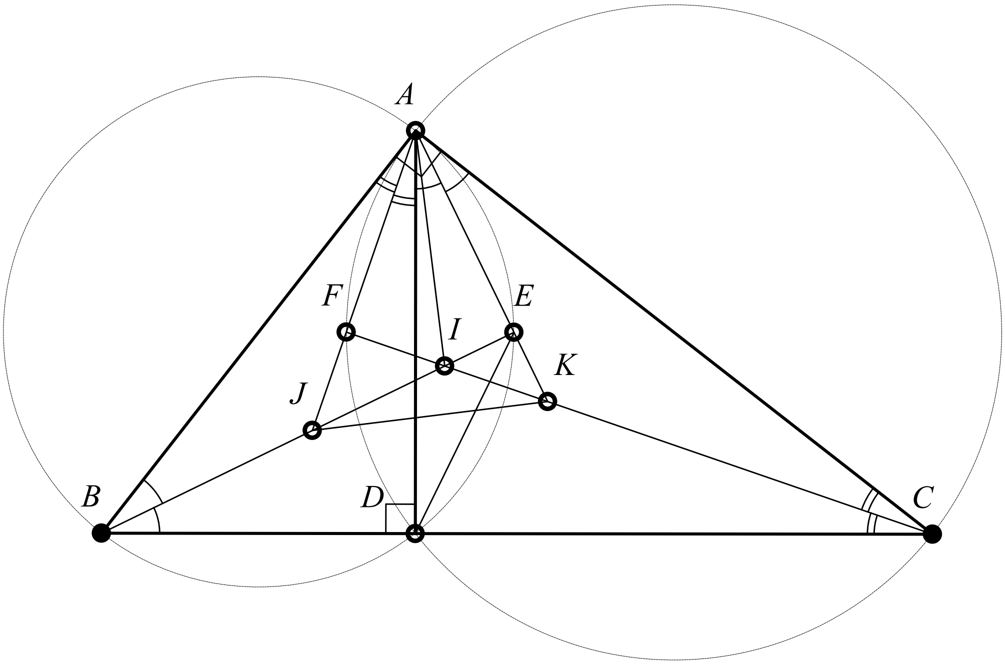

Fig.1.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

1). Notând ascum cu: $\{E\} = BI \cap AK$ şi cu $\{F\} = CI \cap AJ$, avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} AB \perp AC \\ AD \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{ABD} \\ m\left(\widehat{EAD}\right) = m\left(\widehat{EAC}\right) = \frac{1}{2}.mm\left(\widehat{DAC}\right) \\ m\left(\widehat{EBD}\right) = m\left(\widehat{ABE}\right) = \frac{1}{2}.mm\left(\widehat{ABD}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EAD} \equiv \widehat{EBD} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow EABD - inscriptibil \\ AD \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{AEB}\right) = m\left(\widehat{ADB}\right) = 90^0 \Rightarrow JE - \text{înălţime în } \Delta AJK. \quad (1)$$

În mod analog se arată că: KF – înălţime în ΔAJK. (2)

În fine, din relaţiile (1) şi (2), rezultă vă punctul $I\left(\{I\} = JE \cap BH\right)$ – este ortocentrul triunghiului AJK.■

2). Întrucât:

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{JAD}\right) = m\left(\widehat{JAB}\right) = \frac{1}{2} \cdot m\left(\widehat{DAB}\right) \\ m\left(\widehat{KAD}\right) = m\left(\widehat{KAC}\right) = \frac{1}{2} \cdot m\left(\widehat{DAC}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{JAK}\right) = m\left(\widehat{JAD}\right) + m\left(\widehat{KAD}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[m\left(\widehat{DAB}\right) + m\left(\widehat{DAC}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot m\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{1}{2} \cdot 90^0 = 45^0 \Rightarrow \boxed{m\left(\widehat{JAK}\right) = 45^0}. \quad (3)$$

3). Avem însă problema([1]):

Fie ABC **– un triunghi ascţitunghic în care** $m\left(\widehat{BAC}\right)=45^0$ **şi** H **– ortocentrul său. Arătaţi că:** $[AH]\equiv[BC]$. **(v.Fig.2)**

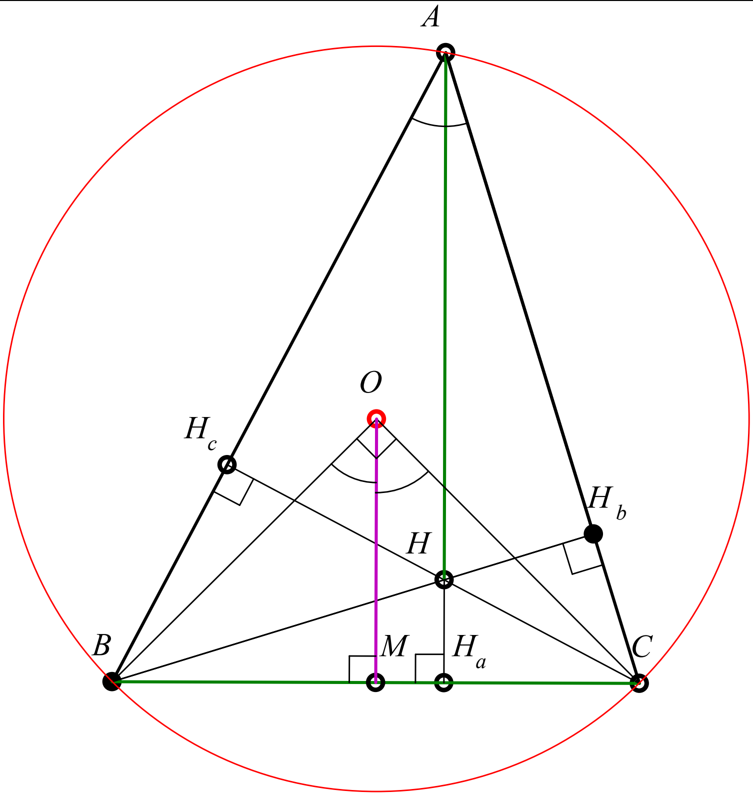

Fig.2.

Demonstraţie (*Mihai Miculiţa*): Notând cu H_a, H_b, H_c – picioarele înălţimilor triunghiului ABC; iar cu O – centrul cercului său circumscris şi cu M – mijlocul laturii $[BC]$, avem (v.Fig.2):

$$\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{BOC}\right)=m\left(\overset{\frown}{BC}\right)=2.m\left(\widehat{BOC}\right)=2\cdot 45^0=90^0 \\ |OB|=|OC|=R \end{array}\right\}\Rightarrow |BC|=2\cdot|OM|=|AH|.\blacksquare$$

Aşa că întrucât I – este ortocentrul triunghiului AJK, în care: $m\left(\widehat{JAK}\right)=45^0$ (3), acest triunghi satisface ipoteza teoremei anterioare, avem atunci: $\boxed{|JK|=|AJ|}$.

[1] Această problemă a apărut nu demult, undeva într-o revista românească (GM?, Recreatii Matematice???) nu mai ştiu unde... ea mi-a fost semnalată la vremea respectivă de către prof.*Radu Ghenghiu*-Oradea (si m-a întrebat atunci eu cum aş rezolva problema).