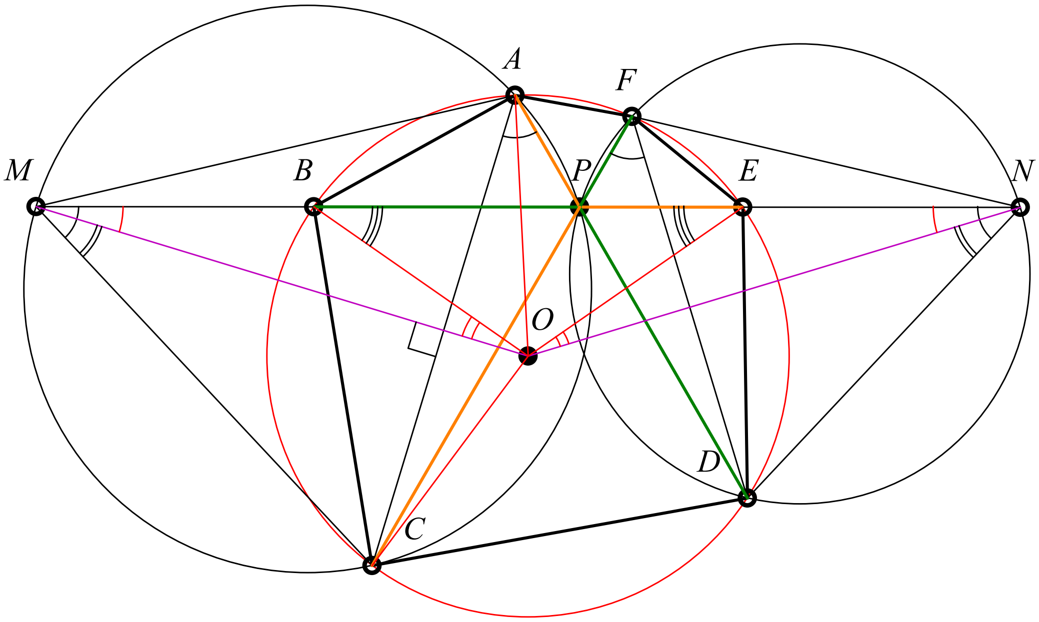
Problema săptămânii a 3-a:

> Fie $P-$ un punct situat în interiorul cercului (O). Prin punctul P se duc trei coarde care determină în jurul punctului P, şase unghiuri de 60^0. Notăm cu A, B, C, D, E şi F (în ordine) capetele acestor coarde. Arătaţi că: $|PA|+|PC|+|PE|=|PB|+|PD|+|PF|$.



SOLUŢIA a II-a (Suleyman Soyler): Notând cu M şi $N-$pe cel de al doilea punct de intersecţie al dreptei BC, în mod respectiv, cu cercurile circumscrise triunghiurilor PAC şi PDF; iar cu avem:

$$AMCP-inscriptibil \Rightarrow \underline{m\left(\widehat{MAC}\right)} = m\left(\widehat{MPC}\right) = \underline{60^0} = m\left(\widehat{MPA}\right) = \underline{m\left(\widehat{MCA}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ACM - echilateral \Rightarrow |PA|+|PC|=|PM|; \quad (1) \text{ şi în mod analog, din:}$$

$$\Delta FDN - echilateral \Rightarrow |PD|+|PF|=|PN|. \quad (2)$$

Aşa că, ţinând seama de relaţiile (1) şi (2), obţinem că:

$$\left(|PA|+|PC|\right)+|PE|=|PB|+|PD|+|PF| \Leftrightarrow |PM|+|PE|=|PN|+|PF| \Leftrightarrow |ME|=|NF| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |MB|+\cancel{|BE|} = \cancel{|BE|}+|EN| \Leftrightarrow \boxed{|BM|=|EN|}. \quad (3)$$

Pentru a demonstra relaţia (3), este suficient arătăm că: $\Delta OMB \equiv \Delta ONE$.

Avem:

$$\left.\begin{array}{l} AMCP-inscriptibil \Rightarrow \widehat{PMC} \equiv \widehat{PAC} \\ ACDF-nscriptibil \Rightarrow \widehat{PAC} \equiv \widehat{PFD} \\ PDNF-nscriptibil \Rightarrow \widehat{PFD} \equiv \widehat{PND} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PMC} \equiv \widehat{PND}. \quad (4)$$

Pe de altă parte, din:

$$\left.\begin{array}{l} |MA|=|MC| \\ |OA|=|OC| \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAM \equiv \Delta OCM\,(LLL) \Rightarrow m\left(\widehat{OMC}\right) = m\left(\widehat{OMA}\right) = \frac{1}{2}.m\left(\widehat{AMC}\right) = \frac{1}{2}.60^0 = 30^0. (5)$$

În mod analog se arată că: $m\left(\widehat{OND}\right)=30^0$. (6)

Din relaţiile (5) şi (6), rezultă că: $\widehat{OMC} \equiv \widehat{OND}$ şi ţinând seama de relaţia (4), obţinem că:

$$m\left(\widehat{PMO}\right) = \underline{m\left(\widehat{PMC}\right)} - \underline{\underline{m\left(\widehat{OMC}\right)}} = \underline{m\left(\widehat{PND}\right)} - \underline{\underline{m\left(\widehat{OND}\right)}} = m\left(\widehat{PNO}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \widehat{PMO} \equiv \widehat{PNO} & (7) \\ \boxed{|OM|=|ON|}; & (8) \end{array}\right.$$

iar din: $\boxed{|OB|=|OE|}$; (9) $\Rightarrow \widehat{OBE} \equiv \widehat{OEB}$ şi atunci, ţinând seama de relaţia (7), obţinem:

$$m\left(\widehat{BOM}\right)=m\left(\widehat{EBO}\right)-m\left(\widehat{PMO}\right)=m\left(\widehat{BEO}\right)-m\left(\widehat{PNO}\right)=m\left(\widehat{EON}\right)\Rightarrow \boxed{\widehat{BOM}\equiv\widehat{EON}}. \quad (10)$$

În fine, din relaţiile (8), (9) şi (10), rezultă că: $\Delta OMB \equiv \Delta ONE\left(LUL\right) \Rightarrow \boxed{|MB|=|NE|}$. (3) ■