GM: 7-8/2000
Categorie: Olimpiadă/Concursuri şi examene
Titlu: "A patra Olimpiadă Balcanică de matematică pentru juniori Macedonia, 21 - 25 iunie 2000"
Autori: Dan Brânzei;Dinu Şerbănescu

A PATRA OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI MACEDONIA, 21 – 25 IUNIE 2000

de **Dan Brânzei** şi **Dinu Şerbănescu**

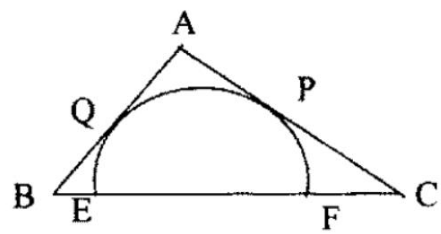
Concursul a avut loc în oraşul Ohrid, în ziua de 23 iunie 2000, între orele 10:00 – 14:30. Concurenţilor li s-au propus spre rezolvare următoarele probleme:

Enunţuri

1. Fie x, y numere întregi astfel încât $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$. Demonstraţi că are loc $x + y = 10$.

2. Găsiţi toate numerele naturale n, $n \geq 1$, încât $n^2 + 3^n$ să fie pătratul unui număr întreg.

3. Un semicerc de diametru EF aşezat pe latura BC a triunghiului ABC este tangent la AB, AC în punctele Q, P aşa cum se arată în figură. Demonstraţi că punctul K comun lui EP şi FQ aparţine înălţimii din A a triunghiului ABC.



Problema 4. La un turneu de tenis au participat de două ori mai mulţi băieţi decât fete. Fiecare pereche de participanţi a jucat exact o dată (şi nu au fost rezultate egale). Raportul între numărul victoriilor obţinute de fete faţă de cele obţinute de băieţi a fost 7 : 5. Câţi participanţi au fost la acest turneu?

Soluţii

1. Avem $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy - 2000 = 2(x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 30xy - 2000 = 2[(x + y)^3 - 1000] - 3xy(x + y - 10) = (x + y - 10)(2((x + y)^2 + 10(x + y) + 100) - 3xy) = (x + y - 10)(2x^2 + xy + 2y^2 + 20x + 20y + 200)$. Deoarece $2x^2 + xy + 2y^2 + 20x + 20y + 200 = (x^2 + xy + y^2) + (x^2 + 20x + 100) + (y^2 + 20y + 100) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x + y)^2) + (x + 10)^2 + (y + 10)^2 > 0$, rezultă

$x + y = 10$.

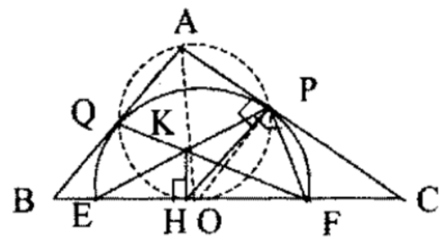
2. Notăm cu $m^2 = n^2 + 3^n$, $m \in \mathbf{N}^* \Rightarrow (m - n)(m + n) = 3^n \Rightarrow \exists\, k \in \mathbf{N}$ astfel încât $\begin{cases} m - n = 3^k \\ m + n = 3^{n-k} \end{cases}$.

Cum $m - n < m + n \Rightarrow 3^k < 3^{n-k} \Rightarrow n - 2k > 0 \Rightarrow n - 2k \geq 1$.

Dacă $n - 2k = 1$, atunci $2n = 3^{n-k} - 3^k = 3^k(3^{n-2k} - 1) = 3^k(3^1 - 1)$, deci $n = 3^k = 2k + 1$. Rezultă $k = 0$ şi $k = 1$ (pentru $m \geq 2$ se arată prin inducţie că $3^m > 2m + 1$) şi deci $n = 1$ sau $n = 3$.

Dacă $n - 2k > 1$, atunci $n - 2k \geq 2$ sau $k \leq n - k - 2$. Deci $3^k \leq 3^{n-k-2}$, de unde $2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8 \cdot 3^{n-k-2} \geq 8(1 + 2(n - k - 2)) = 16n - 16k - 24 \Leftrightarrow 8k + 12 \geq 7n$. Pe de altă parte, $n \geq 2k + 2 \Rightarrow 7n \geq 14k + 14$, imposibil. În consecinţă, valorile căutate ale lui n sunt 1 şi 3.

3. Fie O centrul semicercului şi H proiecţia lui pe K pe BC. Considerăm cazul $O \in (HF)$. Unghiul EPF este înscris în semicerc, deci este drept, ca şi $\sphericalangle KHF$; rezultă că $KHFP$ este patrulater inscriptibil. Obţinem



$\sphericalangle KHP = \sphericalangle KFP = \frac{1}{2}\widehat{PQ} = \frac{1}{2}\sphericalangle QOP$. Din congruenţa $\Delta AOP \equiv \Delta AOQ$ (I.C.) rezultă $\sphericalangle AOP = \sphericalangle AOQ = \frac{1}{2}\sphericalangle QOP \Rightarrow \sphericalangle KHP \equiv \sphericalangle AOP$. Prin complementaritate rezultă că $\sphericalangle PHO \equiv \sphericalangle PAO$, deci $APOH$ este patrulater inscriptibil. Rezultă că $\sphericalangle AHO$ este unghi drept, deci $AH \perp \perp BC$, de unde $K \in AH$.

Cazul $O \in (EH)$ se tratează analog. Situaţia $H = O$ atrage imediat faptul că ΔABC e isoscel şi concluzia rezultă imediat.

Propunem cititorului găsirea unei soluţii analitice (de exemplu, O – originea reperului, OC – axa absciselor, $OF = 1$, P (cos a, sin a), Q (cos b, sin b), AP: $x \cos a + y \sin a = 1$ etc.).

4. Notăm cu n numărul fetelor. Atunci $2n$ este numărul băieţilor, $3n$ este numărul participanţilor şi $C_{3n}^2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$ este numărul total al meciurilor. Numărul de victorii ale băieţilor reprezintă $\frac{5}{12}$ din total, deci $\frac{5}{12}C_{3n}^2 = \frac{5n(3n-1)}{8}$.

Meciurile jucate între băieţi au fost $C_{2n}^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ şi sunt considerate ca victorii ale băieţilor. Prin urmare $\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \Leftrightarrow 15n - 5 \geq$ $\geq 16n - 8 \Leftrightarrow 3 \geq n$. În plus, $\frac{5n(3n-1)}{8} \in \mathbf{N} \Rightarrow 8 \mid n(3n-1)$. Analizând cazurile $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$ rezultă că $n = 3$ şi deci numărul de participanţi este 9.

La această Olimpiadă elevii români au obţinut următoarele rezultate: Raicu Claudiu, 40 de puncte şi medalie de aur; *Romanescu Răzvan*, 30 de puncte; *Pascu Iuliana*, 31 de puncte; *Dăneţ Tiberiu*, 29 de puncte, toţi trei medaliaţi cu argint, şi *Chirilă Cezar*, 27 de puncte şi medalie de bronz.

Într-o ierarhie (neoficială) a celor 9 ţări participante, România a ocupat locul 3 cu 160 de puncte, după Turcia (191 de puncte) şi Bulgaria (165 puncte).

Elevii români au obţinut 50 de puncte la problema 1 (maximul posibil), 47 la a doua, 20 la cea de-a treia şi 43 la ultima. (Remarcăm cu tristeţe că „punctul forte" al elevilor olimpici români – geometria – a devenit punctul slab. Ne exprimăm speranţa că nu acestea vor fi rezultatele reformei învăţământului).

Prof. univ. dr.,
Fac. de Matematică, Univ. „Al. I. Cuza",
Iaşi

Profesor,
C. N. „Sf. Sava"
Bucureşti