Olimpiada Internaţională de Matematică "B. O. Zhautykov" Ediţia I, Alma-Ata, 2005

Enunţuri şi Soluţii – juniori

Prima zi – 13 ianuarie 2005

1. Pe o tablă 9×9 sunt marcate 40 celule. O linie orizontală sau verticală formată din 9 celule se spune că este *bună*, dacă ea are mai multe celule marcate decât nemarcate. Care este cel mai mare număr de linii bune (orizontale şi verticale) pe care-l poate avea tabla?

2. Arătaţi că numărul $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq m \leq 2n$, este pătrat perfect dacă şi numai dacă $m = n$.

3. Fie A o mulţime formată din $2n$ puncte dintr-un plan astfel încât oricare trei dintre acestea nu sunt coliniare. Arătaţi că pentru orice două puncte distincte $a, b \in A$ există o dreaptă ce împarte A în două submulţimi conţinând n puncte fiecare şi astfel încât a şi b se află de părţi diferite în raport cu această dreaptă.

A doua zi – 14 ianuarie 2005

4. Pentru orice numere a, b, c reale şi pozitive, arătaţi inegalitatea

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} \geq 1.$$

5. Cercul înscris triunghiului ABC este tangent laturii AB în punctul D, iar M este mijlocul acestei laturi. Arătaţi că M, centrul cercului înscris şi mijlocul segmentului $[CD]$ sunt coliniare.

6. Determinaţi numerele prime p, q mai mici ca 2005 şi astfel încât $p^2 + 4$ se divide cu q, iar $q^2 + 4$ se divide cu p.

* *
*

1. Deoarece sunt marcate 40 celule şi o linie are cel puţin 5 celule marcate, rezultă că putem avea cel mult 8 linii orizontale bune şi cel mult 8 linii verticale bune. În total, putem avea cel mult 16 linii bune. Alăturat este dat un exemplu de tablă cu 16 linii bune. Deci 16 este numărul maxim de linii bune.

•	•	•	•	•				
	•	•	•	•	•			
		•	•	•	•	•		
			•	•	•	•	•	
•				•	•	•	•	
•	•				•	•	•	
•	•	•				•	•	
•	•	•	•				•	

2. Dacă $m = n$, atunci $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1 = \left(2^{n+1} + 1\right)^2$. Dacă $m < n$, atunci avem $\left(2^{n+1}\right)^2 < 2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1 < \left(2^{n+1} + 1\right)^2$ şi, deci, numărul examinat nu poate fi un pătrat perfect.

Fie acum $n < m \leq 2n$. Să presupunem că ar exista x natural astfel încât $x^2 = 2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$. Observăm că x este impar şi $x > 1$. Scriem relaţia precedentă în forma

$$(x-1)(x+1) = 2^{m+2}\left(2^{2n-m} + 1\right). \qquad (*)$$

Deoarece $(x-1, x+1) = 2$, numărul 2^{m+1} divide una dintre parantezele din membrul stâng, iar cealaltă nu va fi mai mică decât $2^{m+1} - 2$. Cum $m \geq 2n - m + 2$ şi $2^{2n-m+1} \geq 2$, urmează că

$$2^{m+1} - 2 \geq 2^{2n-m+3} - 2 = 4 \cdot 2^{2n-m+1} - 2 > 2^{2n-m+1} + 2.$$

În consecinţă, $(x-1)(x+1) \geq 2^{m+1}\left(2^{m+1} - 2\right) > 2^{m+2}\left(2^{2n-m} + 1\right)$, ceea ce contrazice $(*)$. Aşadar, nici în acest caz numărul dat nu-i pătrat perfect.

3. Fie d_{ab} dreapta determinată de punctele a şi b. Pe segmentul de extremităţi a şi b alegem un punct O astfel încât orice dreaptă ce trece prin O şi nu coincide cu d_{ab} conţine cel puţin un punct din A; pentru că A este mulţime finită, o astfel de dreaptă există.

Notăm cu d_φ dreapta obţinută rotind d_{ab} cu unghiul φ (în sens contrar acelor de ceasornic, de exemplu); avem $d_0 = d_\pi = d_{ab}$. Dacă d_{ab} împarte $A \setminus \{a, b\}$ în două submulţimi cu $n-1$ elemente fiecare, atunci rotind-o cu un unghi φ suficient de mic obţinem dreaptă căutată.

Presupunem că într-un semiplan determinat de d_φ împreună cu a se află m puncte din A, iar în celălalt împreună cu b se află $2n-m$ $(m \neq n)$. Dacă unghiul de rotaţie va fi suficient de aproape de π, atunci situaţia se inversează: într-un semiplan împreună cu a se află $2n-m$ puncte din A, în celălalt împreună cu b sunt m puncte.

Deoarece trecerea de la perechea $(m, 2n-m)$ la $(2n-m, m)$ prin rotaţie în jurul lui O se face printr-o compunere de transformări de tipul $(x, y) \to (x \pm 1, y \mp 1)$, va exista o valoare φ_0 pentru care corespunde perechea (n, n); d_{φ_0} este dreapta căutată.

4. Fie $a + 2b = x$, $b + 2c = y$, $c + 2a = z$. Rezolvând în raport cu a, b, c, obţinem: $a = \frac{4}{9}z + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y$, $b = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z$, $c = \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z - \frac{2}{9}x$. Inegalitatea dată se rescrie

$$\frac{4}{9}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) - 3 \cdot \frac{2}{9} \geq 1.$$

Cum sumele din paranteze sunt ≥ 3 (inegalitatea mediilor), deducem că ultima inegalitate este adevărată.

5. Dacă M coincide cu D, atunci se arată uşor că $BC = AC$, adică triunghiul este isoscel. În acest caz $[CD$ este bisectoarea unghiului C şi coliniaritatea celor trei puncte este evidentă.

Dacă $M \neq D$, fie E punctul diametral opus lui D pe cercul înscris şi $\{F\} = CE \cap AB$. Se ştie că F este punctul de tangenţă cu latura AB a cercului exînscris corespunzător acestei laturi şi că M este mijlocul segmentului $[FD]$ (eventual, demonstraţi!). Atunci MI este linie mijlocie în $\triangle DEF$ (I notează centrul cercului înscris). Rezultă că $MI \parallel CF$ şi, în final, MI trece prin mijlocul segmentului $[CD]$.

6. Dacă $p = q$, atunci aceste numere divid 4 şi, deci, $p = q = 2$. În acest caz, obţinem soluţia $(p, q) = (2, 2)$.

Să determinăm soluţiile (p, q) cu $p \neq q$. Vom spune că perechea (x, y) de numere naturale este *admisă*, dacă îndeplineşte condiţiile: (A) x, y sunt relativ prime şi $x \leq y$; (B) $x^2 + 4$ se divide cu y şi $y^2 + 4$ se divide cu x. Observăm că o pereche admisă este formată din numere impare.

Arătăm mai întâi că, dacă (x, y) este o pereche admisă, atunci perechea $\left(y, \left(y^2+4\right)/x\right)$ este de asemenea admisă. În acest scop, fie $z = \left(y^2 + 4\right)/x$. Deoarece $xy \leq y^2 < y^2 + 4$, rezultă că $y < z$. Apoi, dacă d divide y şi z, atunci d divide y şi $y^2 + 4$, deci d divide 4, ceea ce conduce la $d = 1$. Aşadar, perechea (y, z) îndeplineşte condiţia (A). Evident, z divide $y^2 + 4$; pe de altă parte, $z^2 + 4 = \dfrac{y^2\left(y^2+8\right) + 4\left(x^2+4\right)}{x^2}$, unde numărătorul se divide cu y, care este relativ prim cu x. În concluzie, perechea (y, z) este admisă.

Să considerăm şirul $(a_i)_{i\geq 0}$ definit de $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_{i+2} = \left(a_{i+1}^2 + 4\right)/a_i$, $\forall i \geq 0$. Din ceea ce s-a stabilit mai sus, rezultă că perechile (a_i, a_{i+1}), $i \in \mathbb{N}$, sunt admise.

Să arătăm acum că orice pereche admisă este de forma (a_i, a_{i+1}) pentru un anumit $i \geq 0$. Să presupunem că există perechi admise ce nu-s de această formă şi fie (x, y) perechea de acest fel cu suma $x+y$ minimă. Cum $x^2+4 = ay$ şi $y^2+b = bx$ şi a, x sunt relativ prime (se arată ca mai sus!), obţinem $y^2 + 4 = \dfrac{x^2\left(x^2+8\right) + 4\left(a^2+4\right)}{a^2} = bx$ şi $a^2 + 4$ se divide cu x. Dacă $a \leq x$, atunci (a, x) este pereche admisă şi, datorită minimalităţii, avem $(a, x) = (a_i, a_{i+1})$. Rezultă că $(x, y) = (a_{i+1}, a_{i+2})$, în contradicţie cu presupunerea făcută. Dacă $a > x$, atunci $a \geq x + 2$ şi cum din $y > x$ avem şi $y \geq x + 2$, putem scrie $x^2 + 4 = ay \geq (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, din nou o contradicţie.

În sfârşit, să scriem termenii şirului $(a_i)_{i\geq 0}$ ce nu depăşesc 2005; aceştia sunt: $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 29$, $a_4 = 169$ şi $a_5 = 985$. Sunt numere prime numai 5 şi 29. Soluţiile problemei sunt perechile $(p, q) \in \{(2, 2), (5, 29), (29, 5)\}$.

Enunţuri şi Soluţii – seniori

Prima zi – 13 ianuarie 2005

1. Arătaţi că ecuaţia $x^5 + 31 = y^2$ nu are soluţii întregi.

2. Fie r un număr real astfel încât pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive are loc inegalitatea

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1} \leq r a_m\,,$$

oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $r \geq 4$.

3. Fie $SABC$ o piramidă triunghiulară regulată, i.e. $SA = SB = SC$ şi $AB = BC = AC$. Determinaţi mulţimea punctelor D $(D \neq S)$ din spaţiu ce satisfac condiţia

$$|\cos\delta_A - 2\cos\delta_B - 2\cos\delta_C| = 3,$$

unde $\delta_X = \measuredangle XSD$ pentru $X \in \{A, B, C\}$.

A doua zi – 14 ianuarie 2005

4. Pentru orice numere a, b, c, d reale şi pozitive, arătaţi inegalitatea

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a} \geq \frac{4}{3}.$$

5. Se spune că punctul X interior unui patrulater (convex) este *observabil* din latura YZ dacă piciorul perpendicularei din X pe dreapta YZ aparţine segmentului

$[YZ]$. Un punct interior patrulaterului se spune că este *k-punct* dacă este observabil din exact k laturi ale patrulaterului (de exemplu, orice punct din interiorul unui pătrat este 4-punct). Arătaţi că, dacă în interiorul unui patrulater există un 1-punct, atunci există şi un k-punct pentru $k \in \{2, 3, 4\}$.

6. Determinaţi numerele prime p, q mai mici ca 2005 şi astfel încât $p^2 + 8$ se divide cu q, iar $q^2 + 8$ se divide cu p.

* *
*

1. Dacă x este par, atunci $x^5 + 31 \equiv 3 \pmod 4$ şi nu poate fi pătrat perfect. Urmează că x este impar şi, deci, y este par. Mai mult, $x^5 \equiv 1 \pmod 4$ implică $x \equiv 1 \pmod 4$. Să scriem ecuaţia dată în forma

$$x^5 + 2^5 = y^2 + 1.$$

Partea stângă se divide cu $x + 2$ şi $x + 2 \equiv 3 \pmod 4$ va avea un divizor prim de tipul $4l + 3$. Dar, conform lemei de mai jos, numărul impar $y^2 + 1$ are divizori primi numai de tipul $4m+1$. În concluzie, în ipoteza că ecuaţia dată ar avea soluţii întregi, ajungem la o contradicţie.

Lemă. *Dacă y^2+1 admite un divizor prim impar p, atunci p este de tipul $4m+1$.*

Într-adevăr, avem $y^2 \equiv -1 \pmod p$. În conformitate cu mica teoremă a lui Fermat, avem şi $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Atunci

$$y^{p-1} \equiv \left(y^2\right)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

Ultima congruenţă spune că $(p-1)/2$ este par, adică $p \equiv 1 \pmod 4$.

2. Notăm $b_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Atunci, şirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător şi verifică relaţia $b_{m+1} \leq r\,(b_m - b_{m-1})$, $m \in \mathbb{N}^*$. Pentru $c_m = b_m / \left(b_{m-1}\sqrt{r}\right)$ această relaţie devine $c_{m+1}c_m + 1 \leq c_m\sqrt{r}$.Deci, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem

$$c_{m+1} + \frac{1}{c_m} \leq \sqrt{r}.$$

Utilizând inegalitatea $c + \dfrac{1}{c} \geq 2$ $(c > 0)$, obţinem

$$n\sqrt{r} \geq \left(c_{n+1} + \frac{1}{c_n}\right) + \left(c_n + \frac{1}{c_{n-1}}\right) + \cdots + \left(c_2 + \frac{1}{c_1}\right) \geq$$
$$\geq c_{n+1} + 2\,(n-1) + \frac{1}{c_1} \geq 2\,(n-1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $r \geq 4\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, şi rezultă că $r \geq 4$ (numărul $\dfrac{n-1}{n}$ poate fi oricât de aproape dorim de 1).

3. Fie e_X versorul vectorului $\overrightarrow{SX}$, $X \in \{A, B, C, D\}$. Atunci, ţinând seama că $\cos\delta = (e_D, e_X)$ (produs scalar), $X \in \{A, B, C\}$, condiţia din enunţ se scrie

$$\left|\frac{1}{3}\,(e_D, e_A) - \frac{2}{3}\,(e_D, e_B) - \frac{2}{3}\,(e_D, e_C)\right| = \left|\left(-e_D, \frac{1}{3}e_A - \frac{2}{3}e_B - \frac{2}{3}e_C\right)\right| = 1.$$

Notăm $f=\dfrac{2}{3}e_B+\dfrac{2}{3}e_C-\dfrac{1}{3}e_A$. Vectorul f este unitar, căci

$$|f|^2=(f,f)=\frac{1}{9}\left(4e_B^2+4e_C^2+e_A^2+8\left(e_B,e_C\right)-4\left(e_A,e_B\right)-4\left(e_A,e_C\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{9}\left(9+8\cos\alpha-4\cos\alpha-4\cos\alpha\right)=1,$$

unde $\alpha=\measuredangle ASB$. Atunci, condiţia $|(-e_D,-f)|=1$ este echivalentă cu faptul că vectorii e_D şi f sunt coliniari.

Fie SH înălţimea piramidei şi F simetricul punctului A în raport cu H. Calculalele următoare arată că vectorii $\overrightarrow{SF}$ şi f sunt coliniari:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA},\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right);$$
$$\overrightarrow{AF}=2\,\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}-2\,\overrightarrow{SA}\right);$$
$$\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\left(2\,\overrightarrow{SB}+2\,\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right).$$

Ca urmare, locul geometric căutat este dreapta d_{SF} din care se exclude punctul S.

4. Notăm

$$A=\frac{c}{a+2b}+\frac{d}{b+2c}+\frac{a}{c+2d}+\frac{b}{d+2a},$$
$$B=\frac{b+2c}{a+2b}+\frac{c+2d}{b+2c}+\frac{d+2a}{c+2d}+\frac{a+2b}{d+2a},$$
$$C=\frac{a+c}{a+2b}+\frac{b+d}{b+2c}+\frac{a+c}{c+2d}+\frac{b+d}{d+2a}.$$

Constatăm uşor că $2B+C=5A+4$. Conform inegalităţii mediilor, avem $B\geq 4$. Ţinând seama de inegalitatea $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\geq\dfrac{4}{u+v}$ $(u,v>0)$, obţinem

$$C\geq(a+c)\,\frac{4}{a+2b+c+2d}+(b+d)\,\frac{4}{b+2c+d+2a}\geq\frac{8}{3}$$

(ultima inegalitate se obţine luând $x=a+c$ şi $y=b+d$ în $\dfrac{x}{x+2y}+\dfrac{y}{y+2x}\geq\dfrac{2}{3}$, iar această inegalitate se stabileşte astfel:

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2x}=\frac{2x^2+2xy+2y^2}{2x^2+5xy+2y^2}=1-\frac{3xy}{2x^2+5xy+2y^2}\geq 1-\frac{3xy}{9xy}=\frac{2}{3}\text{)}.$$

Aşadar, $5A+4\geq 8+\dfrac{8}{3}$, deci $A\geq\dfrac{4}{3}$, q.e.d.

5. Să numim *zonă de observaţie* a laturii XY a patrulaterului convex semibanda, notată Z_{XY}, care este mărginită de segmentul $[XY]$, perpendicularele pe aceasta duse în extremităţi şi care este situată în acelaşi semiplan cu patrulaterul. Evident, un punct interior patrulaterului este observabil din latura XY dacă şi numai dacă aparţine Z_{XY}.

Să examinăm diferitele cazuri ce apar:

a) Dacă patrulaterul nu are unghiuri obtuze, atunci el este dreptunghi şi are numai 4-puncte.

b) Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are un singur unghi obtuz, anume $\widehat{A}$. Atunci zonele de observare ale laturilor BC şi CD acoperă patrulaterul şi, deci, 1-puncte nu există.

c) Fie $ABCD$ cu exact două unghiuri obtuze şi vecine, anume $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$. În acest caz patrulaterul este situat în întregime în Z_{AD}, dar şi în $Z_{AB} \cup Z_{BC} \cup Z_{CD}$. Ca urmare, nu există 1-puncte.

d) Fie $ABCD$ cu exact două unghiuri obtuze şi opuse, anume $\widehat{B}$ şi $\widehat{D}$. Atunci patrulaterul este situat atât în $Z_{AB} \cup Z_{BC}$ cât şi în $Z_{AD} \cup Z_{CD}$ şi nu va avea 1-puncte.

e) Fie $ABCD$ cu trei unghiuri obtuze şi fie $\widehat{A}$ unghiul său ascuţit. Atunci intersecţia $Z_{BC} \cap Z_{CD}$ este situată în patrulater şi formează paralelogramul $LMNC$ (ca şi în $ABCD$, vârfurile sunt notate în sensul acelor de ceasornic). Fie $\{E\} = BM \cap AD$ şi $\{F\} = DM \cap AB$. Se constată uşor că $\triangle ABE \subset Z_{AB}$ şi $\triangle AFD \subset Z_{AD}$. Atunci, M este 4-punct, punctele segmentului deschis (MF) sunt 3-puncte, iar cele interioare patrulaterului $AFME$ sunt 2-puncte.

6. Procedăm ca şi în cazul problemei J_6 (problema 6 de la juniori, prezentată mai sus).

Dacă $p = q$, atunci numerele p şi q divid 8 şi, deci, $p = q = 2$, adică $(2, 2)$ este soluţie a problemei.

Să determinăm soluţiile (p, q) cu $p \neq q$. O pereche (x, y) de numere naturale se numeşte *admisă* dacă: (A) x, y sunt relativ prime şi $x \leq y$; (B) $x^2 + 8$ se divide cu y, iar $y^2 + 8$ se divide cu x. Mai întâi, observăm că o pereche admisă este formată din numere impare. Apoi, ca şi în problema J_6 se demonstrează că, dacă (x, y) este pereche admisă, atunci şi perechea $\left(y, \left(y^2 + 8\right)/x\right)$ este admisă. Acest rezultat are următoarele consecinţe:

1) Dacă $(a_i)_{i \geq 0}$ este şirul dat de $a_0 = a_1 = 1$ şi $a_{i+2} = \left(a_{i+1}^2 + 8\right)/a_i$ $(i \geq 0)$, atunci orice pereche (a_i, a_{i+1}) este admisă;

2) Dacă $(b_i)_{i \geq 0}$ este şirul dat de $b_0 = 1$, $b_1 = 3$ şi $b_{i+2} = \left(b_{i+1}^2 + 8\right)/b_i$ $(i \geq 0)$, atunci orice pereche (b_i, b_{i+1}) este admisă.

Să arătăm acum că orice pereche admisă are forma (a_i, a_{i+1}) sau (b_i, b_{i+1}) pentru un anumit indice $i \geq 0$. Presupunem că ar fi adevărată situaţia contrară şi fie (x, y) perechea minimală (în raport cu suma $x + y$) care nu-i de nici una dintre formele precedente. Cum $x^2 + 8 = ay$, $y^2 + 8 = bx$ şi a, x sunt relativ prime, obţinem $y^2 + 8 = \dfrac{x^2\left(x^2 + 16\right) + 8\left(a^2 + 8\right)}{a^2} = bx$ şi $a^2 + 8$ se divide cu x. Dacă $a \leq x$, atunci (a, x) este pereche admisă şi, datorită minimalităţii, avem $(a, x) = (a_i, a_{i+1})$ sau $(a, x) = (b_i, b_{i+1})$; rezultă că $(x, y) = (a_{i+1}, a_{i+2})$ sau $(x, y) = (b_{i+1}, b_{i+2})$, în contradicţie cu presupunerea făcută. Dacă $a > x$, atunci $x^2 + 8 = ay \geq (x + 2)^2 = a^2 + 4x + 4$, de unde $x = 1$, $a = y = 3$, din nou contradicţie.

Să scriem acum termenii şirurilor $(a_i)_{i \geq 0}$ şi $(b_i)_{i \geq 0}$ ce nu depăşesc 2005: $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 89$, $a_4 = 881$; $b_0 = 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 17$, $b_3 = 99$, $b_4 = 577$. Dintre aceste numere sunt prime numai 3, 17, 89, 881 şi 577. Ca urmare, soluţiile problemei sunt perechile $(p, q) \in \{(2, 2), (3, 17), (17, 3), (89, 881), (881, 89)\}$.