Probleme de antrenament - 2003

JUNIORI

1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Să se arate că
$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

2. Să se demonstreze că orice număr natural este egal cu diferenţa a două numere naturale care au acelaşi număr de divizori primi.

3. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Să se arate că oricum am alege $n+2$ numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, printre ele există două, a şi b astfel încât $n < a - b < 2n$.

4. Să se arate că dintre oricare $2n+1$ numere întregi distincte al căror modul nu depăşeşte $2n-1$, există trei cu suma 0.

5. La o masă rotundă participă mai multe oficialităţi ale oraşului Townsville. Pe masă sunt puse dosare pentru fiecare, având numele persoanei respective pe el; dar oficialităţile s-au aşezat arbitrar, şi nici una nu şi-a primit mapa sa. Să se arate că organizatorii mesei rotunde pot roti masa astfel încât măcar două dintre oficialităţi să aibă mapele lor în faţă.

6. Fie un triunghi ABC şi O centrul cercului circumscris triunghiului, iar K centrul cercului circumscris triunghiului AOC. Cercul din urmă intersectează AB şi BC în M respectiv N. Fie L simetricul lui K faţă de dreapta MN. Să se arate că $BL \perp AC$.

7. Fie M o mulţime finită de numere reale astfel încât din orice trei elemente distincte din M putem alege două dintre ele astfel încât suma lor aparţine mulţimii M. Care este numărul maxim de elemente ale lui M?

8. Fie un triunghi dreptunghic ABC, $\angle C = 90°$. Tangentele cercului circumscris triunghiului ABC în A şi C se taie în E. Fie N mijlocul laturii AC şi K mijlocul arcului BC ce nu îl conţine pe A. Dreapta KN taie cercul din nou la M. Să se arate că $\angle EMK = 90°$.

9. Cercurile ω_1 şi ω_2 se intersectează în A şi B. O dreaptă trece prin B şi taie din nou cercul ω_1 în K, iar pe ω_2 în M. Fie t_1 o dreaptă tangentă la cercul ω_1 paralelă cu AM; ea taie cercul ω_1 în Q. Dreapta AQ taie din nou cercul ω_2 în R. Să se arate că tangenta t_2 la cercul ω_2 în R este paralelă cu AK, şi t_1, t_2, KM sunt trei drepte concurente.

10. Între 8 echipe de fotbal se organizează un mini-campionat, în care fiecare echipă joacă o singură dată cu toate celelalte echipe. Să se arate că la sfârşitul mini-campionatului există patru echipe A, B, C şi D astfel încât A ia bătut pe B, C şi pe D, B ia bătut pe C şi pe D, iar C a bătut pe D.

11. Fie Γ_1 şi Γ_2 două cercuri de centre O_1 şi respectiv O_2, care se intersectează A în B. Fie CD o tangentă comună CD este mai apropiat de A decât de B. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ACD. Demonstraţi că $\angle CBD \equiv \angle O_1OO_2$.

12. În câte moduri se pot obţine n dolari din bancnote

    a) de 1 şi 2 dolari?

    b) de 1, 2 şi 3 dolari?

    c) de 1, 2 şi 5 dolari?

13. Să se determine numărul triunghiurilor de perimetru 2003, având lungimile laturilor numere naturale.

14. (Teorema lui Peek) Pe o foaie de matematică este desenat un poligon, ale cărui vârfuri sunt poziţionate în noduri ale reţelei de pătrate (considerate ca fiind de latură unitatea). Să se demonstreze că aria S a acestui poligon este dată de formula

$$S = N + \frac{k}{2} - 1$$

unde N este numărul de noduri ale reţelei de pătrate situate în interiorul acestui poligon, iar k este numărul de noduri ale acestei reţele situate pe laturile lui.

Folosind eventual acest rezultat să se arate că orice pentagon care are vârfurile în noduri ale reţelei de pătrate de mai sus are aria cel puţin $\frac{5}{2}$.

15. Să se demonstreze că orice poligon convex de arie 1 poate fi inclus într-un triunghi de arie 2.

16. Fie 4004 puncte distincte, care se găsesc în interiorul unui poligon convex de arie 1. Să se arate că există un poligon convex de arie $\frac{1}{2003}$ inclus în poligonul dat, astfel încât el nu conţine nici unul dintre punctele date în interiorul său.

17. Fie a, b, c trei numere reale. Să se arate că

$$(ab + ac + bc + a + b + c)^2 \geq 4\left((a + b)(b + c)(c + a) + abc\right).$$

18. Să se arate că dacă $x, y, z > 0$ atunci

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}.$$

19. Să se găsească toate soluţiile în numere prime ale ecuaţiilor

a) $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + e^2$;

b) $a(a + 1) + b(b + 1) = c(c + 1)$.

20. Să se găsească toate soluţiile în numere raţionale ale ecuaţiei

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1.$$

21. Să se găsească numărul maxim de puncte ce pot fi plasate în interiorul unui hexagon regulat de latură 1 astfel distaţa dintre orice două dintre ele să fie cel puţin $\sqrt{2}$.

22. Fie un triunghi ABC, I centrul cercului înscris şi G centrul de greutate al triunghiului. Să se arate că dacă $IG||BC$ atunci lungimile laturilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică.

23. Un măr este de forma unei sfere de rază 31mm. Un vierme intră în măr şi sapă un tunel de 61mm lungime, după care iese din măr. Să se arate că putem tăia mărul cu un cuţit dreapt prin centrul său astfel încât una dintre cele două jumătăţi formate nu este stricată.

24. Un pătrat 6×6 este acoperit cu piese de domino (2×1). Să se arate că există o dreaptă orizontală sau verticală care trece prin interiorul pătratului, dar care nu taie nici o piesă de domino în interior.

25. Să se arate că pentru orice numere reale pozitive a, b, c avem

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 2.$$

26. Să se determine cel mai mare număr real m astfel încât oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c avem

$$\sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{c + a}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}} \geq m.$$

27. Într-un plan sunt alese 64 de puncte distincte astfel încât ele determină exact 2003 de drepte distincte. Să se arate că printre cele 64 de puncte există cel puţin 4 care se găsesc pe aceaşi dreaptă.

28. La un turneu participă 9 şahişti. Conform regulamentului fiecare participant joacă o singură partidă cu fiecare dintre ceilalţi. La un moment dat s-a constatat că exact 2 participanţi au jucat acelaşi număr de partide. Să se arate că în acest caz sau exact un singur şahist nu a jucat nici o partidă, sau exact un singur şahist a jucat cu toţi ceilalţi.

29. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare înscris într-un cerc de centru O, iar M şi N mijloacele laturilor BC şi respectiv CD. Să se afle valoarea numerică a raportului ariilor figurilor $OMCN$ şi $ABCD$.

30. Să se arate că fiecare număr natural este egal cu diferenţa a două numere naturale care au acelaşi număr de divizori primi.

== probleme selectate de Valentin Vornicu ==