Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15-20 august 2016

Clasa a VIII-a

Problema 1. O prismă se numeşte *binară* dacă i se pot eticheta vârfurile cu câte un număr din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul etichetelor vârfurilor de pe fiecare faţă să fie -1.
Demonstraţi că o prismă este binară dacă şi numai dacă numărul de vârfuri ale prismei este divizibil cu 8.

ViitoriOlimpici.ro

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi n numere întregi, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea că $|a_i - a_{i-1}| = 1$, $\forall\, i = \overline{2, n}$. Ce valori poate lua suma celor n numere?

Problema 3. Pe laturile (BC) şi (DA) ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $BE = DF$.
a) Arătaţi că cercurile circumscrise ale triunghiurilor BDE şi ACF se intersectează în două puncte, unul situat pe (CD), celălalt pe cercul de diametru $[AB]$.
Se notează cele două puncte cu M, respectiv N.
b) Demonstraţi că centrul pătratului se află pe dreapta MN.
c) Arătaţi că simetricul lui N faţă de AB se află pe segmentul (EF).

Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15-20 august 2016
Soluţii şi baremuri – Clasa a VIII-a

Problema 1. O prismă se numeşte *binară* dacă i se pot eticheta vârfurile cu câte un număr din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul etichetelor vârfurilor de pe fiecare faţă să fie -1.
Demonstraţi că o prismă este binară dacă şi numai dacă numărul de vârfuri ale prismei este divizibil cu 8.

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie:

1. Vom arăta mai întâi că numărul de vârfuri ale unei prisme binare este multiplu de 8.

Ne uităm la muchiile verticale. Dacă una din muchiile verticale ale unei feţe uneşte două vârfuri etichetate la fel, atunci cealaltă muchie verticală a feţei trebuie să unească două vârfuri etichetate diferit şi reciproc. Astfel, muchiile verticale care unesc vârfuri etichetate la fel alternează cu muchii ce unesc vârfuri etichetate diferit, prin urmare trebuie să avem un număr par de muchii verticale. Prin urmare bazele sunt poligoane regulate cu un număr par de vârfuri. Dacă avem n muchii verticale de fiecare fel, atunci produsul tuturor etichetelor este pe de o parte $1^n \cdot (-1)^n$, pe de altă parte este egal cu produsul dintre produsul etichetelor de pe baza de sus şi produsul etichetelor de pe baza de jos, adică $(-1) \cdot (-1)$. Deducem că n este par şi, cum prisma are $4n$ vârfuri, numărul total de vârfuri ale unei prisme binare este multiplu de 8. .... **5p**

2. Vom arăta că orice prismă care are un număr de vârfuri care este divizibil cu 8 este binară.

Vom arăta cum se pot eticheta vârfurile astfel încât produsul etichetelor pe fiecare faţă să fie -1.
Să etichetăm deocamdată toate vârfurile feţei de sus cu 1, iar vârfurile feţei de jos alternativ, cu 1 şi -1. (Acest lucru este posibil pentru că poligonul de la bază are un număr par de vârfuri.) Acum să alegem o muchie verticală care are în ambele capete eticheta 1 şi să îi schimbăm etichetele în -1. Astfel produsul etichetelor de pe fiecare faţă verticală este -1, la fel şi pe faţa de sus. Pe faţa de jos, din cele $4n$ vârfuri, $2n + 1$ au eticheta -1, deci produsul etichetelor este iarăşi -1. Prin urmare am reuşit să etichetăm vârfurile astfel ca produsul etichetelor să fie -1 pe fiecare faţă, aşadar prisma este binară. **2p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi n numere întregi, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu proprietatea că $|a_i - a_{i-1}| = 1$, $\forall\, i = \overline{2, n}$. Ce valori poate lua suma celor n numere?

Andrei Eckstein

Soluţie:
Vom arăta că dacă n este impar atunci suma poate fi orice număr întreg, iar dacă n este par atunci suma poate fi orice număr de aceeaşi paritate ca şi $n/2$.

Dacă n este par, $n/2$ dintre termeni sunt pari, $n/2$ impari, deci suma lor are aceeaşi paritate cu $n/2$. **2p**
Putem obţine oricare din numerele $kn + n/2$, $kn + n/2 + 2$, $kn + n/2 + 4$, $\ldots$, $kn + n/2 + n = (k+1)n + n/2$ astfel: pentru $kn + n/2$ alegem $n/2$ numere egale cu k alternativ cu $n/2$ numere egale cu $k+1$. Apoi, pentru fiecare din sumele următoare, preschimbăm câte un k în $k+2$. Astfel obţinem toate sumele care au aceeaşi paritate cu $n/2$. **3p**
Dacă $n = 2m+1$, atunci m dintre numere au o paritate şi celelalte $m+1$ cealaltă paritate. Alegând m numere egale cu k alternativ cu $m+1$ numere egale cu $k+1$ obţinem $kn + m + 1$. Preschimbând succesiv câte un k în $k+2$ vom obţine sumele $kn + m + 3$, $kn + m + 5$, $\ldots$, $kn + m + 2m + 1 = (k+1)n + m$.
Alegând m numere egale cu $k+1$ alternativ cu $m+1$ numere egale cu k obţinem suma $kn + m$. Preschimbând succesiv câte un k în $k+2$ vom obţine sumele $kn + m + 2$, $kn + m + 4$, $\ldots$, $kn + m + 2m + 2 = (k+1)n + m + 1$. Astfel, vom obţine că suma poate fi orice număr întreg. **2p**

Problema 3. Pe laturile (BC) şi (DA) ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E, respectiv F, astfel încât $BE = DF$.
a) Arătaţi că cercurile circumscrise ale triunghiurilor BDE şi ACF se intersectează în două puncte, unul situat pe (CD), celălalt pe cercul de diametru $[AB]$.
Se notează cele două puncte cu M, respectiv N.
b) Demonstraţi că centrul pătratului se află pe dreapta MN.
c) Arătaţi că simetricul lui N faţă de AB se află pe segmentul (EF).

prelucrare Andrei Eckstein şi Mircea Fianu

Soluţie:
a) Fie $M \in (CD)$ astfel ca $DF = DM$. Atunci $AFMC$ şi $BEMD$ sunt trapeze isoscele, deci inscriptibile, prin urmare cercurile circumscrise triunghiurilor BDE şi ACF trec prin punctul M. **1p**
Este evident că cele două cercuri nu pot fi tangente, deci mai au un al doilea punct de intersecţie situat în exteriorul pătratului. (Deoarece $\sphericalangle AMC$ este obtuz, trebuie ca $\sphericalangle ANC$ să fie ascuţit.)

Avem $m(\sphericalangle ANM) = m(\sphericalangle ACM) = 45^\circ$ şi $m(\sphericalangle BNM) = m(\sphericalangle MDB) = 45^\circ$, deci $m(\sphericalangle ANB) = m(\sphericalangle ACM) + m(\sphericalangle MDB) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. **2p**

b) Fie O centrul pătratului. Deoarece $OA \cdot OC = OB \cdot OD$, punctul O are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri, deci este pe axa radicală a acestora, MN. ... **1p**

c) Vom arăta că E', F', simetricele punctelor E şi F faţă de AB, se găsesc pe cercul circumscris lui CAF, respectiv pe cel circumscris lui BDE, apoi că $N \in (E'F')$.
Într-adevăr, $\sphericalangle AE'B \equiv \sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CFD$ (din congruenţa triunghiurilor AEB şi CFD), ceea ce arată că patrulaterul $E'CFA$ este inscriptibil, adică E' se află pe cercul circumscris triunghuiului CAF. Analog se arată că F' se găseşte pe cercul circumscris triunghiului BED.
Atunci $m(\sphericalangle F'NM) = m(\sphericalangle E'NM) = 90^\circ$ (din patrulaterele inscriptibile $F'NMD$ şi $E'NMC$), deci $N \in (E'F')$, de unde rezultă concluzia. **3p**