Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2017

Clasa a VII-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise, în ordine crescătoare, numerele naturale de la 1 la 100. Doi copii, Alina şi Bogdan, joacă următorul joc: pe rând, începând cu Alina, ei aleg unul din cele 99 de spaţii goale aflate între două numere consecutive şi îl completează cu unul dintre semnele ,,+" sau ,, $\cdot$ ". Dacă la sfârşitul completării rezultatul obţinut este număr impar, câştigă Alina, în caz contrar câştigă Bogdan. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare şi cum trebuie să joace el pentru a câştiga?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie:
Alina are strategie câştigătoare.
Ea poate juca astfel:
- începe prin a scrie ,,+" după primul număr, 1;
- în continuare, Bogdan face un semn în faţa sau în spatele unui număr impar (undeva între două numere consecutive, dintre care unul este, desigur, impar), atunci Alina face semnul ,, $\cdot$ " în spatele, respectiv în faţa aceluiaşi număr impar.

Astfel, Alina se asigură că fiecare din numerele impare, cu excepţia lui 1, este înmulţit cu (cel puţin) unul din vecinii săi pari, deci termenul în care apare acest factor va fi par. Prin urmare, Alina asigură că rezultatul este $1 +$ o sumă de numere pare, deci impar.

Problema 2. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, CF este înălţime ($F \in [AB]$) şi BM este mediană ($M \in [AC]$). Ştiind că $BM = CF$ şi $\angle MBC \equiv \angle FCA$, demonstraţi că ΔABC este echilateral.
Mai rămâne valabilă concluzia dacă nu se mai dă că triunghiul este ascuţitunghic?

Soluţia 1: Avem $FM = \dfrac{AC}{2} = CM$, deci $\angle MFC \equiv \angle MCF \equiv \angle MBC$. Rezultă că patrulaterul $BCMF$ este inscriptibil. Atunci $m(\angle BMC) = m(\angle BFC) = 90°$, deci $[BM]$ este mediană şi înălţime, adică $AB = BC$. Din $\Delta\, BCF \equiv \Delta\, CBM$ (CC) rezultă $\angle ABC \equiv \angle ACB$, deci $AC = AB = BC$.
Dacă triunghiul nu este ascuţitunghic concluzia nu mai este adevărată: dacă $m(\angle B) = 90°$ şi $m(\angle C) = 60°$, atunci $F = B$ şi $BC = CM = BM$, iar $m(\angle MBC) = m(\angle MCF) = 60°$, adică ipotezele sunt verificate fără ca triunghiul să fie echilateral.

Soluţia 2: Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi $BN \perp AC$, $N \in AC$. Se ştie (şi se arată uşor) că $\angle ABN \equiv \angle CBO$. Într-adevăr, cum $OA = OB = OC$, avem $m(\angle OBC) = m(\angle OCB) \overset{not}{=} x$, $m(\angle OAC) = m(\angle OCA) \overset{not}{=} y$ şi $m(\angle OAB) = m(\angle OBA) \overset{not}{=} z$, cu $2x + 2y + 2z = 180°$, adică $x + y + z = 90°$. Rezultă că $m(\angle OBC) = 90° - (y + z) = 90° - m(\angle BAC) = m(\angle FCA)$. Dar $m(\angle MBC) = m(\angle FCA) = 90° - m(\angle BAC) = m(\angle OBC)$, deci centrul cercului circumscris se află pe mediana $[BM]$ şi pe mediatoarea lui $[BC]$. Dacă $AB \neq BC$, atunci rezultă că $O = M$ şi triunghiul ABC este dreptunghic în B, contradicţie. Rămâne că $AB = BC$, deci $[BM]$ este şi înălţime. De aici se continuă ca la soluţia 1.

Problema 3. Determinaţi numerele naturale nenule a_1, a_2, $\ldots$, a_{2016}, mai mici decât 2017, care satisfac condiţia $i+j \mid ia_i + ja_j$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$.

Soluţie:

Condiţia din enunţ revine la $i + j \mid i(a_i - a_j)$.
• Alegând $i = k$, $j = k+1$, $k \geq 1008$ avem $2k+1 \mid k(a_k - a_{k+1})$. Dar $(2k+1,\ k) = 1$, deci $2k+1 \mid a_k - a_{k+1}$. Însă $|a_i - a_{i+1}| \leq 2015 < 2k+1$, deci trebuie ca $a_k - a_{k+1} = 0$. Deducem că $a_{1008} = a_{1009} = \ldots = a_{2016}$.
• Alegând $i \leq 1007$ şi $j = 2017 - i \geq 1010$, obţinem $2017 \mid i(a_i - a_{2017-i})$. Dar 2017 este prim, deci $(2017, i) = 1$. Rezultă că $2017 \mid a_i - a_{2017-i}$. Din nou, $|a_i - a_{2017-i}| < 2017$ implică $a_i - a_{2017-i} = 0$, prin urmare toate numerele trebuie să fie egale.
• Reciproc, orice secvenţă formată din 2016 numere naturale egale cu un $k \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ este soluţie a problemei.