Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15-20 august 2016

Clasa a VII-a

Problema 1. Pătrăţelele unitate ale unei table 7×7 se completează cu numerele $1, 2, \ldots, 49$ astfel încât numere consecutive sunt scrise în pătrăţele care au o latură comună. Care este numărul maxim de numere prime pe care le poate conţine un rând al tablei?

ViitoriOlimpici.ro

Problema 2. a) Arătaţi că există o infinitate de triplete formate din numere întregi distincte, (a, b, c), care verifică ecuaţia $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.
b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care există numerele întregi distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un pătrat şi punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ şi $G \in (AD)$ astfel încât $BE = CF = DG$. Dacă $AF \cap BG = \{X\}$, $AE \cap BF = \{Y\}$ şi $DX \cap CY = \{Z\}$, arătaţi că:
a) punctele X, Y şi Z sunt situate pe cercul de diametru $[AB]$;
b) $m(\sphericalangle CZG) = 45°$;
c) simetricul lui Z faţă de AB se află pe EG.

Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15-20 august 2016
Soluţii şi baremuri – Clasa a VII-a

Problema 1. Pătrăţelele unitate ale unei table 7×7 se completează cu numerele $1, 2, \ldots, 49$ astfel încât numere consecutive sunt scrise în pătrăţele care au o latură comună. Care este numărul maxim de numere prime pe care le poate conţine un rând al tablei?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie:
Colorăm pătrăţelele tablei cu alb şi negru, asemeni unei table de şah, cu colţurile având culoarea neagră. Două pătrăţele care au o latură comună vor avea culori diferite. Avem 25 de pătrăţele negre şi 24 albe. Atunci toate pătrăţelele negre vor conţine numere impare, iar pătrăţelele albe numere pare. Fiecare rând va conţine 4 pătrăţele albe şi 3 negre sau invers, adică 4 numere de o paritate şi 3 de cealaltă. Prin urmare, deoarece cu excepţia lui 2, toate numerele prime sunt impare, pe o linie putem avea cel mult 5 numere prime: 4 impare, plus numărul 2. **5p**

Pe de altă parte, chiar există o amplasare a numerelor pe tablă care respectă cerinţele şi pentru care există o linie care conţine 5 numere prime, şi anume prima linie a tablei de mai jos: **2p**

3	2	11	12	13	18	19
4	1	10	9	14	17	20
5	6	7	8	15	16	21
28	27	26	25	24	23	22
29	30	31	32	33	34	35
42	41	40	39	38	37	36
43	44	45	46	47	48	49

În concluzie, numărul maxim de numere prime pe care le poate avea o linie a unei table completate după regulile din enunţ este 5.

Problema 2. a) Arătaţi că există o infinitate de triplete formate din numere întregi distincte, (a, b, c), care verifică ecuaţia $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.
b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care există numerele întregi distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$.

Olimpiadă Estonia

Soluţie:
a) Este clar că nu avem soluţii cu $a, b, c < 0$ şi că avem doar un număr finit cu $a, b, c \geq 0$. Căutăm soluţii cu $c < 0$ şi $a > 0$. Putem spera să găsim chiar soluţii cu $c = -a$. Căutând astfel de soluţii ajungem la ecuaţia $2a^2 + b^2 = b^3$, deci $2a^2 = b^2(b-1)$. Putem alege $b = 2k^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci obţinem $a = bk = k(2k^2 + 1)$. Pentru $k = 0$ şi $k = 1$ aceste soluţii nu convin (avem $a = c$, respectiv $a = b$), dar pentru $k \geq 2$ obţinem o infinitate de soluţii convenabile ale ecuaţiei din enunţ. **3p**
b) Vom arăta că pentru orice număr natural nenul n, ecuaţia din enunţ are soluţii cu cmponente distincte.
Dacă n este multiplu de 3, ne folosim de punctul a) pentru a alege succesiv triplete de numere distincte (şi distincte de cele alese anterior) de forma $(a_{3j+1}, a_{3j+2}, a_{3j+3})$ care verifică $a_{3j+1}^2 + a_{3j+2}^2 + a_{3j+3}^2 = a_{3j+1}^3 + a_{3j+2}^3 + a_{3j+3}^3$. Astfel se găseşte o soluţie cu componente distincte ale ecuaţiei din enunţ.
Dacă n este un număr natural care dă restul 1 la împărţirea cu 3, mai alegem, în plus faţă de numerele din cazul precedent, şi $a_n = 0$.
În fine, dacă n este un număr natural care dă restul 2 la împărţirea cu 3, mai alegem, în plus faţă de numerele din cazul precedent, şi $a_n = 1$. **4p**

Problema 3. Fie $ABCD$ un pătrat şi punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ şi $G \in (AD)$ astfel încât $BE = CF = DG$. Dacă $AF \cap BG = \{X\}$, $AE \cap BF = \{Y\}$ şi $DX \cap CY = \{Z\}$, arătaţi că:
a) punctele X, Y şi Z sunt situate pe cercul de diametru $[AB]$;

Mihaela Berindeanu (Gazeta Matematică B, nr. 6-7-8)

b) $m(\sphericalangle CZG) = 45°$;

Andrei Eckstein

c) simetricul lui Z faţă de AB se află pe EG.

Mircea Fianu

Soluţie:
a) Avem $GA = DF$, deci $\Delta ABG \equiv \Delta DAF$, $\Delta BCF \equiv \Delta CDG$ şi $\Delta ECF \equiv \Delta FDG$ (CC). Rezultă că $m(\sphericalangle GAX) = m(\sphericalangle GBA) = 90° - m(\sphericalangle AGB)$, deci $AX \perp BG$. Analog rezultă $AE \perp BF$, deci X şi Y se află pe cercul de diametru $[AB]$. **1p**
Din $\Delta ECF \equiv \Delta FDG$ rezultă $\sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle DFG$. Cum patrulaterele $ECFY$ şi $FDGX$ sunt inscriptibile, avem succesiv: $\sphericalangle ZYB \equiv \sphericalangle CYF \equiv \sphericalangle CEF \equiv \sphericalangle DFG \equiv \sphericalangle DXG \equiv \sphericalangle BXZ$, deci patrulaterul $BYXZ$ este inscriptibil, de unde concluzia.
.... **2p**
b) Vom demonstra că patrulaterul $AZCG$ este inscriptibil, de unde va rezulta că $m(\sphericalangle CZG) = m(\sphericalangle CAG) = 45°$.
Din $\Delta ABE \equiv \Delta CDG$ rezultă $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle GCD$, deci $\sphericalangle YZB \equiv \sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle GCD$, de unde $m(\sphericalangle CZA) = 90° - m(\sphericalangle CZB) = 90° - m(\sphericalangle GCD) = m(\sphericalangle CGD)$, ceea ce

arată că $AZCG$ este inscriptibil. **2p**
c) Fie E' şi G' simetricele punctelor E, respectiv G, faţă de AB. Atunci patrulaterul $AGCE'$ este un trapez isoscel ($AE' = AE = CG$), deci inscriptibil. Aşadar punctele A, G, C, E', Z sunt conciclice. Analog se arată că punctele B, E, D, G', Z sunt conciclice.
Prin urmare, $m(\sphericalangle G'ZB) = 180° - m(\sphericalangle G'DB) = 135°$, $m(\sphericalangle E'ZA) = 180° - m(\sphericalangle E'CA) = 135°$ şi $m(\sphericalangle AZB) = 90°$, de unde rezultă că punctele $E'Z, G'$ sunt coliniare. Atunci şi simetricele lor faţă de AB sunt coliniare. **2p**