UŞOARE

1. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un pătrat perfect în a cărui scriere zecimală cifra 1 apare de exact n ori.

* * *, VO 2010-2011, cls. VIII, et: ?

Soluţia 1 :

Vom arăta că $a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{222...2}_{n+1 \text{ cifre}}5}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$ acest lucru este evident.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}}$. Atunci, folosind că $9x+1 = 10^n$, avem $a = x \cdot 10^{n+2} + 200x + 25 = 100x(9x+1) + 200x + 25 = 900x^2 + 300x + 25 = (30x+5)^2$ adică un pătrat perfect.

(Altfel, pe aceeaşi idee: Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n+1 \text{ cifre}}}$. Atunci

$a = (x+1) \cdot 10^{n+1} + 2x + 3 = (x+1)(9x+1) + 2x + 3 = 9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$.)

Soluţia 2 :

Vom arăta că $a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{n-1 \text{ cifre}}6}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $x = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}}$. Atunci, folosind că $9x+1 = 10^n$, avem $a = \overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{n \text{ cifre}}} + 1 = x \cdot 10^n + 5x + 1 = x(9x+1) + 5x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$ adică un pătrat perfect.

2. Arătaţi că pentru orice cifră c a sistemului zecimal şi orice $n \in \mathbb{N}$ există un pătrat perfect în a cărui scriere zecimală cifra c apare de exact n ori.

* * *, VO 2010-2011, cls IX, et ?

Soluţie:

• Pentru $n = 0$ afirmaţia din enunţ este evidentă. În continuare vom considera $n \geq 1$.

• Pentru $c = 0$ este suficient să observăm dacă n este par, adică $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(10^k)^2$ conţine exact $n = 2k$ cifre de 0, iar dacă n este impar, adică $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(2^5 \cdot 10^k)^2 = 1024\underbrace{0000...00}_{2k \text{ cifre}}$ conţine exact $n = 2k+1$ cifre de 0.

• Pentru $c = 1$ se pot considera pătrate de forma $\overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{n-1 \text{ cifre}}6} = \overline{\underbrace{333...3}_{n-1 \text{ cifre}}4}^2$ sau de forma $\overline{\underbrace{1111...1}_{n \text{ cifre}}\underbrace{222...2}_{n+1 \text{ cifre}}5} = \overline{\underbrace{333...3}_{n \text{ cifre}}5}^2$ dar aceste pătrate sunt greu de folosit pentru ,,generarea", prin înmulţirea cu alte pătrate, a unor pătrate în care o anumită cifră c apare de exact n ori.

În continuare vom construi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de pătrate cu următoarele proprietăţi:

- x_n conţine exact n cifre de 1
- x_n conţine numai cifrele $0, 1, 2$
- în scrierea zecimală a lui x_n fiecare cifră nenulă (exceptând-o pe prima) este precedată de cel puţin 4 cifre de 0.

Se poate lua, de exemplu, $x_n = \left(10^5 + 10^{5^2} + 10^{5^3} + ... + 10^{5^n}\right)^2$.

$x_n = 10^{2\cdot 5} + 10^{2\cdot 5^2} + ... + 10^{2\cdot 5^n} + 2 \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} 10^{5^i+5^j}$. Exponenţii $2 \cdot 5^k$, $k \in \overline{1,n}$ şi $5^i + 5^j$, cu $1 \leq i < j \leq n$ sunt nu numai toţi diferiţi dar şi diferă prin cel puţin 5. Faptul că sunt distincţi rezultă, de exemplu, din unicitatea scrierii unui număr în baza 5, iar faptul că diferă prin cel puţin 5 este evident deoarece toţi exponenţii sunt multipli de 5. Cum fiecare 10^y vine înmulţit fie cu 1 fie cu 2, scrierea obţinută mai sus pentru x_n este tocmai reprezentarea în baza 10 a acestuia. Se vede atunci că x_n conţine n cifre de 1 şi $\frac{n(n-1)}{2}$ cifre de 2, toate precedate de cel puţin 4 cifre de 0. Problema este astfel rezolvată pentru $c = 1$ şi putem folosi şirul (x_n) pentru a rezolva problema pentru $c \geq 2$.

• Pentru $c \geq 2$ vrem să-l înmulţim pe x_n cu un pătrat perfect y_c cu proprietăţile:
- y_c conţine cifra c exact o dată
- numărul $2y_c$ nu conţine cifra c
- numărul $2y_c$ are cel mult 4 cifre.

Se pot lua: $y_2 = 25$, $y_3 = 36$, $y_4 = 4$, $y_5 = 1156$, $y_6 = 16$, $y_7 = 576$, $y_8 = 81$, $y_9 = 9$.
Numărul $y_c \cdot x_n$ va fi format din n ,,blocuri" conţinând scrierea zecimală a lui y_c şi $\frac{n(n-1)}{2}$,,blocuri" conţinând scrierea zecimală a lui $2y_c$, blocuri separate eventual de zerouri. Aceste blocuri nu se suprapun şi, datorită modului de alegere a lui y_c, numărul obţinut conţine exact n cifre de c.

3. Aflaţi cea mai mare valoare a lui k pentru care numărul 3^{11} se poate scrie ca o sumă de k numere naturale consecutive.

Concurs SUA, 1987, VO 2010-2011, cls VII, et ?

Soluţie:
Dacă notăm cu n cel mai mic dintre cele k numere, trebuie ca

$$n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+k-1) = 3^{11},$$

adică $\underbrace{(n+n+n+...+n)}_{k \text{ termeni}} + \big(1+2+3+...+(k-1)\big) = 3^{11}$, sau $kn + \frac{(k-1)k}{2} = 3^{11}$, adică $k(2n+k-1) = 2 \cdot 3^{11}$.

Dacă k este par atunci $k = 2 \cdot 3^m$ şi $2n+k-1 = 3^{11-m}$. Cum $k < 2n+k-1$, rezultă $m \leq 5$, deci cel mai mare k par este $2 \cdot 3^5 = 486$. (În acest caz $n = \frac{3^5+1}{2} = 122$.)

Dacă k este impar atunci $k = 3^m$ şi $2n+k-1 = 2 \cdot 3^{11-m}$. Cum $k < 2n+k-1$, rezultă $m \leq 5$, deci cel mai mare k impar este $k = 3^5 = 243$. (În acest caz $n = \frac{5 \cdot 3^5 + 1}{2} = 608$.)

Comparând valorile găsite în cele două cazuri, vedem că cel mai mare k cu proprietatea cerută este $k = 486$.

4. Un număr de cinci cifre A se scrie numai cu cifre din mulţimea $\{2, 3\}$, iar numărul de patru cifre B se scrie numai cu cifre din mulţimea $\{3, 4\}$.
Este posibil ca produsul $A \cdot B$ să se scrie numai cu cifra 2?

$* * *$, VO 2011-2012, cls VII, et ?

Soluţie:
Avem că $22222 \leq A \leq 33333$ şi $3333 \leq B \leq 4444$ deci $22222 \cdot 3333 \leq A \cdot B \leq 33333 \cdot 4444$ adică $74065926 \leq A \cdot B \leq 148131852$. Aşadar $A \cdot B$ are 8 sau 9 cifre dar e mai mare decât 22222222 şi mai mic decât 222222222 deci nu poate avea toate cifrele egale cu 2.

5. Să se determine numerele naturale a, b, c, mai mari decât 1 pentru care $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este număr natural.

** * *, VO 2011-2012, et 2, cls 7, pb 3*

Soluţie. Relaţia $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ fiind simetrică în a, b, c putem presupune $a \leq b \leq c$.
Cum $c \geq b \geq a \geq 2$, avem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{2},$$

deci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
Dacă $a \geq 4$ atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{4} < 1$, deci acest caz nu este posibil. Rezultă că $a \in \{2, 3\}$.

Dacă $a = 2$ trebuie ca $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Dacă $b \geq 5$ atunci $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$. Rezultă atunci că $b \in \{3, 4\}$.

Pentru $b = 3$ rezultă $c = 6$, iar dacă $b = 4$ rezultă $a = 4$.

Dacă $a = 3$ trebuie ca $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$. Dacă $b \geq 4$ atunci $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Rezultă atunci că $b = 3$.

Pentru $b = 3$ rezultă $c = 3$.
În concluzie, renunţând la condiţia $a \leq b \leq c$, obţinem că (a, b, c) poate fi (3,3,3); (2,4,4); (4,2,4); (4,4,2); (2,3,6); (2,6,3); (3,2,6); (3,6,2); (6,2,3); (6,3,2).

6. Numărul prim p are următoarea proprietate: restul r, al împărţirii lui p la 210 este un număr compus şi poate fi reprezentat ca sumă de două pătrate perfecte.
Să se determine numărul r.

Olimpiada Naţională, Republica Moldova , VO 2011-2012, et 2, cls VII, pb 4

Soluţie. Din enunţ avem
$$p = 210k + r, \qquad r < 210$$
sau
$$p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k + r$$
Deoarece p este număr prim rezultă că r nu poate avea în descompunerea sa în factori nici pe 2, nici pe 3, nici pe 5, nici pe 7. În caz contrar, ar rezulta că p este unul din aceste numere, caz în care am obţine $k = 0$ şi $p = r$ ceea ce nu se poate deoarece p este număr prim, iar r număr compus.
Atunci $r \in \{11^2;\ 11 \cdot 13;\ 11 \cdot 17;\ 11 \cdot 19;\ 13^2\}$.
Prin calcul se constată că numai $r = 13^2 = 12^2 + 5^2$ se scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule. Deoarece în unele cărţi este considerat şi 0 ca fiind pătrat perfect, probabil că în enunţ trebuia preciazat că este vorba de pătrate perfecte *nenule*. În caz contrar, şi 11^2 se scrie ca $0^2 + 11^2$, deci se găsesc două numere, 121 şi 169, care ar putea eventual îndeplini condiţiile din enunţ. Mai rămâne să arătăm că există numere prime care împărţite la 210 chiar dau aceste resturi. Alegând $k = 1$, găsim numerele $p = 331$ şi $p = 379$ care sunt prime şi dau la împărţirea cu 210 chiar resturile dorite, anume 121 şi respectiv 169.
În concluzie $r \in \{121, 169\}$.

7. Să se determine numerele naturale n şi p pentru care numerele p, $p + 3^n$, $p + 3^{n+1}$, $p + 3^{n+2}$ şi $p + 3^{n+3}$ sunt simultan prime.

M. S. Pop, 2011-2012, cls VII-VIII, et 3, pb 2

Soluţie. Dacă $p \geq 3$ atunci p este impar şi deci $p + 3^n$, de exemplu, este sigur număr par, mai mare decât 2, aşadar nu poate fi număr prim. Rămâne $p = 2$.
Numerele devin
$$2,\ 2 + 3^n,\ 2 + 3^{n+1},\ 2 + 3^{n+2},\ 2 + 3^{n+3}.$$
Dacă $n = 0$ obţinem numerele 2, 3, 5, 11, 29 care sunt prime.
Dacă $n = 1$ obţinem numerele 2, 5, 11, 29, 83 care sunt prime.
Pentru $n = 2$ numărul $2 + 3^{n+3}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.
Pentru $n = 3$ numărul $2 + 3^{n+2}$ are ultima cifră 5, este mai mare decât 5, deci nu este prim.
Să observăm că ultima cifră a lui 3^{4k+1} este 3, pentru orice k număr natural.
Atunci, pentru $n = 4k$, numărul 3^{n+1} are ultima cifră 3 şi de aici, pentru $k \geq 1$, numărul $2 + 3^{n+1}$ nu e prim.
Pentru $n = 4k + 1$, numărul 3^n are ultima cifră 3 şi de aici, pentru $k \geq 1$, $2 + 3^n$ nu e prim.
Pentru $n = 4k + 2$, numărul 3^{n+3} are ultima cifră 3 şi de aici $2 + 3^{n+3}$ (având ultima cifră 5 şi fiind mai mare decât 5 pentru orice $k \geq 0$) nu e prim.
Pentru $n = 4k + 3$, $k \geq 0$, numărul 3^{n+2} are ultima cifră 3 şi de aici $2 + 3^{n+2}$ nu e prim.
În concluzie, toate numerele sunt prime dacă $p = 2$, $n = 0$ sau $p = 2$, $n = 1$.

8. Se dau numerele $a = \overline{a_1a_2\ldots a_n},\ a > 1$, şi $b = \overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n}$ (în baza 10).
Ştiind că $a^2 \mid b$, aflaţi valoarea raportului $\dfrac{b}{a^2}$.

Turneul Oraşelor, 2011-2012, cls 7, et 5, pb 1

Soluţie. Avem $10^{n-1} \leq a < 10^n$ şi $b = (10^n+1)a$, de unde rezultă că $a \mid 10^n+1$, adică există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $ak = 10^n+1$. Cum $10^{n-1}k \leq ak < 10^nk$, adică $10^{n-1}k \leq 10^n+1 < 10^nk$, deducem că, dacă $n > 1$, atunci $k \leq 10$ şi $k \geq 2$. În plus, k trebuie să dividă 10^n+1, deci k este impar şi $k \neq 3$, $k \neq 5$ şi $k \neq 9$, deci k poate fi numai 7. Prin urmare singura valoare întreagă posibilă a lui $\dfrac{b}{a^2}$ este 7 (dacă a are cel puţin două cifre). Dacă $n = 1$, din $a^2 \mid \overline{aa}$ rezultă $a \mid 11$, ceea ce nu se poate pentru $a > 1$, a cifră.

Observaţie: Există într-adevăr numere a şi b cu proprietatea din enunţ, de exemplu, $a = 143$ şi $b = 143143 = 143^2 \cdot 7$.

9. Se dau şase numere de patru cifre al căror cel mai mare divizor comun este 1. Arătaţi că putem alege cinci dintre ele al căror cel mai mare divizor comun este tot 1.

Olimpiadă Rusia, 2011-2012, cls 7, et 5, pb 3

Soluţie. Presupunem că oricare cinci din cele şase numere au un divizor comun prim. Acesta nu divide şi cel de-al şaselea număr. Cei şase divizori comuni ai grupurilor de câte cinci numere sunt numere prime distincte, adică cel puţin 2, 3, 5, 7, 11, 13. Atunci unul dintre numere este cel puţin $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$, contradicţie cu faptul că numerele au câte patru cifre.

10. Fie 9 numere naturale care îl divid pe 30^{2009}. Arătaţi că există două dintre acestea având produsul pătrat perfect.

Bogdan Vioreanu, Yale University, S.U.A., 2011-2012, cls 6,7,8, et 7, pb 1

Soluţie. vezi GM 789/2009

11. Arătaţi că ecuaţia $x^{10} + y^{10} = 2010z^{10}$ nu poate avea în mulţimea numerelor întregi decât soluţia $x = y = z = 0$.

Călin Gasparic, Bucureşti, 2011-2012, cls 7-8, et 7, pb 3

Soluţie. Fie (x, y, z) o soluţie a ecuaţiei, cu x, y, z numere întregi. Dacă $z = 0$ atunci rezultă $x = y = 0$. Pentru $z \neq 0$ avem $x \neq 0$ şi $y \neq 0$; în caz contrar se ajunge la contradicţie. Se ştie că ,,suma a două pătrate perfecte se divide cu 3 dacă şi numai dacă fiecare dintre ele se divide cu 3. Cum 2010 se divide cu 3, iar x^{10} şi y^{10} sunt pătrate perfecte rezultă că $x = 3x_1, y = 3y_1$ cu $0 < x_1 < x$ şi $0 < y_1 < y$. Cu acestea ecuaţia devine $3^{10}x_1^{10} + 3^{10}y_1^{10} = 2010z^{10}$, iar după împărţirea la 3 obţinem $3^9x_1^{10} + 3^9y_1^{10} = 670z^{10}$. De aici deducem că $z = 3z_1$ cu $0 < z_1 < z$ şi ecuaţia devine $3^9x_1^{10} + 3^9y_1^{10} = 670 \cdot 3^{10}z_1^{10}$ sau $x_1^{10} + y_1^{10} = 2010z_1^{10}$. Procedând asemănător obţinem $x_2^{10} + y_2^{10} = 2010z_2^{10}$ cu $0 < x_2 < x_1 < x$, $0 < y_2 < y_1 < y, 0 < z_2 < z_1 < z$. Procedeul se poate aplica de o infinitate de ori ceea ce presupune că există o infinitate de numere naturale mai mici decât un număr natural dat. Contradicţie. În concluzie nu avem decât soluţia $x = y = z = 0$.

MEDII

1. Care este cel mai mare număr natural par care nu se poate scrie ca suma a două numere compuse impare?

Concurs SUA, 1984; VO 2010-2011, cls. VII, et: ?

Soluţia 1:

Observăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, numărul $6k + 9 = 3(2k + 3)$ este un număr compus impar. Un număr par n poate da la împărţirea cu 6 unul dintre resturile: 0, 2, 4.

Dacă $n = 6m$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 3$, putem scrie $n = 6m = \big(6(m-3) + 9\big) + 9$ adică sub forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 0, 6 şi 12, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare (cel mai mic număr compus impar fiind 9, acest lucru este evident).
Dacă $n = 6m + 2$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 7$, putem scrie $n = 6m + 2 = \big(6(m-7) + 9\big) + 35$ adică sub

forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 2, 8, 14, 20, 26, 32 şi 38, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $n = 6m+4$, $m \in \mathbb{N}$ cu $m \geq 5$, putem scrie $n = 6m+4 = \big(6(m-5)+9\big)+25$ adică sub forma unei sume de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 4, 10, 16, 22, şi 28, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Aşadar numerele naturale pare care nu se scriu ca sumă de două numere compuse impare sunt: 0,2,4,6,8,10,12,14,16,20,22,26,28,32 şi 38, ultimul fiind numărul căutat.

Soluţia 2:

Observăm că orice număr de forma $5(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$ este compus şi impar. Un număr par n poate avea ultima cifră, $u(n)$, 0,2,4,6 sau 8.
Dacă $u(n) = 0$ şi $n \geq 30$ atunci $n = 10m$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, deci $n = 10m = 15 + (10m - 15) = 15 + 5(2m-3)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 0, 10 şi 20, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 2$ şi $n \geq 42$ atunci $n = 10m + 2$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, deci $n = 10m + 2 = 27 + (10m - 25) = 27 + 5(2m - 5)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 2, 12, 22 şi 32, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 4$ şi $n \geq 24$ atunci $n = 10m+4$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, deci $n = 10m+4 = 9+(10m-5) = 9+5(2m-1)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 4 şi 14, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 6$ şi $n \geq 36$ atunci $n = 10m + 6$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, deci $n = 10m + 6 = 21 + (10m - 15) = 21 + 5(2m - 3)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 6, 16, şi 26, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Dacă $u(n) = 8$ şi $n \geq 48$ atunci $n = 10m + 8$ cu $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, deci $n = 10m + 8 = 33 + (10m - 25) = 33 + 5(2m - 5)$ e sumă de două numere compuse impare. Despre celelalte numere de această formă, anume 8, 18, 28 şi 38, se verifică prin încercări că nu se scriu ca suma a două numere compuse impare.
Din nou, examinând lista numerelor pare care nu se scriu ca suma a două numere compuse impare, găsim că 38 este cel mai mare număr cu această proprietate.

2. Pentru n număr natural rezolvaţi, în mulţimea numerelor întregi, ecuaţia

$$x^4 + y^4 = 13^n.$$

Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin, 2011-2012, cls 7-8, et 3, pb 4

Soluţie. Dacă $n = 0$ ecuaţia devine

$$x^4 + y^4 = 1$$

cu soluţiile $(\pm1; 0)$ şi $(0; \pm1)$.
Dacă $n \neq 0$, atunci 13^n este divizibil cu 13.
Orice număr întreg p dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12. Atunci p^2 dă la împărţirea cu 13 unul din resturile 0,1,3,4,9,10,12, iar p^4 unul din resturile 0,1,3,9. Se observă că singura variantă care poate conduce la

$$x^4 + y^4 = 13^n$$

este cea cu x^4, y^4 divizibile cu 13, adică cea cu x, y divizibili cu 13.
Dacă (x, y) este o soluţie a ecuaţiei din enunţ cu $n > 0$, atunci $x = 13x_1$, $y = 13y_1$, unde $x_1^4 + y_1^4 = 13^{n-4}$. Dacă $n - 4 > 0$ găsim că $x_1 = 13x_2$, $y_1 = 13y_2$ şi $x_2^4 + y_2^4 = 13^{n-8}$. Continuăm procedeul până când, după k paşi, ajungem la ecuaţia $x_k^4 + y_k^4 = 13^{n-4k}$, unde $r = n - 4k \in \{0, 1, 2, 3\}$ este restul împărţirii lui n la 4.
Dacă $r \in \{1, 2, 3\}$ (adică n nu este divizibil cu 4) atunci am văzut că $x_k = 13x_{k+1}$, $y_k = 13y_{k+1}$, deci membrul stâng este divizibil cu 13^4 în vreme ce membrul drept nu este divizibil cu 13^4. Prin urmare, dacă n nu este divizibil cu 4, ecuaţia nu are soluţii.
Dacă $r = 0$ (adică n este divizibil cu 4) rezultă că
$(x_k, y_k) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$, de unde obţinem

$(x, y) \in \{(\pm 13^m, 0), (0, \pm 13^m)\}$, unde $m = \frac{n}{4}$.

În concluzie, dacă n nu este divizibil cu 4 atunci ecuaţia nu are soluţii, iar dacă $n = 4m$, $m \in \mathbb{N}$, atunci ecuaţia are soluţiile $(\pm 13^m, 0)$ şi $(0, \pm 13^m)$.

3. Aflaţi cel mai mic multiplu al lui 81 care are:
a) numai cifre de 1.
b) o cifră de 0 şi în rest numai cifre de 1.

$* * *$, 2012, faza finală, cls 7

Soluţie.
a) Fie n numărul de cifre al multiplului căutat. Trebuie ca $10^n - 1$ să fie divizibil cu 3^6. Ştim că $n = \varphi(3^6) = 2 \cdot 3^5$ satisface $10^n - 1 \vdots 3^6$. Din $3^6 \mid (10^{3^5} - 1)(10^{3^5} + 1)$ şi $10^{3^5} + 1 = \mathcal{M}9 + 2$ rezultă că $3^6 \mid (10^{3^5} - 1)$. Dar $10^{3^5} - 1 = (10^{3^4} - 1)(10^{2 \cdot 3^4} + 10^{3^4} + 1) = (10^{3^4} - 1)(\mathcal{M}9 + 3) = (10^{3^3} - 1)(10^{2 \cdot 3^3} + 10^{3^3} + 1)(\mathcal{M}9 + 3) = (10^{3^3} - 1)(\mathcal{M}9 + 3)(\mathcal{M}9 + 3) = ... = (10^3 - 1)(M_9 + 3)(M_9 + 3)(M_9 + 3)(M_9 + 3) = M3^7$ deci este suficient să alegem $n = 3^4 = 81$........**5 puncte**
b) Trebuie cel puţin 9 cifre de 1; încercăm cu 9 de 1 şi un 0.
Prin verificare se contată că singurul număr de această formă care e divizibil cu 81 este 1111111101.
2 puncte

Soluţie alternativă pentru a):
Din $v_3(10^n - 1) = v_3(10 - 1) + v_3(n)$ (lema *Lifting the Exponent*), rezultă că pentru ca $v_3(10^n - 1) = 6$ trebuie $v_3(n) = 4$, deci n minim este $3^4 = 81$.

4. Şirul p_n este definit recursiv astfel: $p_1 = 2$ şi p_{n+1} este cel mai mare factor prim al lui $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, pentru $n \geq 1$.
a) Este 5 termen al şirului?
b) Este 11 termen al şirului?

$* * *$, 2012, cls 8, faza finală

Soluţie.
Calculăm următorii termeni ai şirului: $p_2 = 3$, $p_3 = 7$.
a) Presupunem, prin absurd, că 5 ar fi termen al şirului. Dacă $p_n = 5$, $(n \geq 4)$, cum toţi termenii şirului începând cu al treilea nu sunt divizibili nici cu 2, nici cu 3, ar trebui ca p_n să fie o putere a lui 5. Dar relaţia $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 = 5^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, nu poate avea loc: membrul stâng dă restul 3 la împărţirea cu 4, în vreme ce membrul drept dă rest 1.............................**2 puncte**
b) Presupunem, prin absurd, că 11 ar fi termen al şirului. Dacă $p_n = 11$, $(n \geq 4)$, înseamnă că $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1 = 5^k 11^\ell$, cu $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$. Membrul stâng dă rest 3 la împărţirea cu 4, 5^k dă rest 1, deci trebuie ca 11^ℓ să dea rest 3 la împărţirea cu 4. Dar $11^\ell = (12 - 1)^\ell = \mathcal{M}4 + (-1)^\ell$, deci ℓ trebuie să fie impar. Pe de altă parte, membrul stâng dă rest 1 la împărţirea cu 3, iar $11^\ell = (12-1)^\ell = \mathcal{M}3 + (-1)^\ell = \mathcal{M}3 - 1$ (căci ℓ este impar). Deducem că 5^k trebuie să fie de forma $\mathcal{M}3 - 1$. Dar $5^k = (6 - 1)^k = \mathcal{M}3 + (-1)^k$, deci trebuie şi k să fie impar. Atunci $5^k 11^\ell = 55u^2$, deci ar trebui ca $p_1 p_2 p_3 \cdots p_{n-1} + 1 = 55u^2$. Membrul stâng dă rest 1 la împărţirea cu 7, iar $55 = \mathcal{M}7 - 1$, deci ar trebui ca u^2 să dea rest 6 la împărţirea cu 7, ceea ce nu se poate (un pătrat perfect dă unul dintre resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7). Am obţinut aşadar o contradicţie. Prin urmare 11 nu este termen al şirului...............................**5 puncte**

GRELE

1. Se ştie că 2^{333} este un număr de 101 cifre a cărui primă cifră este 1. Câte dintre numerele 2^k, $1 \leq k \leq 332$, au prima cifră 4?

Tournament of the Towns, 2001, VO 2010 -2011, cls X, et ?

Soluţie: Atunci când în secvenţa 2^1, 2^2, ..., 2^{332} trecem de la 2^n la 2^{n+1}, numărul de cifre fie rămâne neschimbat, fie creşte cu 1. Ceea ce este important este că **dacă numărul de cifre creşte cu 1 atunci 2^{n+1} începe cu cifra 1** şi reciproc, dacă 2^k începe cu 1 atunci tocmai a crescut numărul de cifre. Privim acum prima cifră a termenilor situaţi între doi termeni care încep cu 1. Deoarece fiecare termen se obţine prin dublare din precedentul, avem următoarele cinci variante:

• $2^k = 1.....$, $2^{k+1} = 2.....$, $2^{k+2} = 4.....$, $2^{k+3} = 8.....$ ($2^{k+4} = 1.....$), adică, pe scurt, $1 \to 2 \to 4 \to 8$
• $2^k = 1.....$, $2^{k+1} = 2.....$, $2^{k+2} = 4.....$, $2^{k+3} = 9.....$ ($2^{k+4} = 1.....$), adică, pe scurt, $1 \to 2 \to 4 \to 9$
• $2^k = 1.....$, $2^{k+1} = 2.....$, $2^{k+2} = 5.....$, ($2^{k+3} = 1.....$), adică, pe scurt, $1 \to 2 \to 5$
• $2^k = 1.....$, $2^{k+1} = 3.....$, $2^{k+2} = 6.....$, ($2^{k+3} = 1.....$), adică, pe scurt, $1 \to 3 \to 6$
• $2^k = 1.....$, $2^{k+1} = 3.....$, $2^{k+2} = 7.....$, ($2^{k+3} = 1.....$), adică, pe scurt, $1 \to 3 \to 7$
Deoarece 2^{333} are 101 cifre şi începe cu 1, printre numenere din secvenţa noastră vor fi 99 de numere care încep cu cifra 1 (ele au $2, 3, ..., 100$ cifre). Fiecare 1 este urmat de doi sau de trei termeni care nu încep cu 1. Dacă un 1 este urmat de 3 cifre diferite de 1 (variantele 1 şi 2 de mai sus) atunci una dintre cifre este 4, iar dacă un 1 este urmat de doar două cifre diferite de 1 (variantele 3, 4 şi 5 de mai sus) atunci cifra 4 nu apare printre cele două cifre. Aşadar pentru a vedea câte dintre primele 332 de puteri nenule ale lui 2 încep cu 4 trebuie doar să vedem de câte ori se întâmplă ca cifra 1 să fie urmată de 3 cifre diferite de 1. Adăugăm termenul 2^0 la început pentru a obţine un bloc complet, 1, 2, 4, 8. Dacă notăm cu x numărul de blocuri cu 4 termeni (cele din variantele 1 şi 2, adică cele care încep cu $1 \to 2 \to 4 \to$) şi cu y numărul blocuri cu 3 termeni (cele din variantele 3, 4 şi 5), avem $x + y = 100$ şi $4x + 3y = 333$ (în secvenţa 2^0, 2^1, ..., 2^{332} sunt 333 de termeni). Rezolvând sistemul obţinem $x = 33$, $y = 67$, deci avem 33 de blocuri de tipul $1 \to 2 \to 4 \to$ adică 33 de termeni care încep cu cifra 4.

2. 94 de cărămizi, fiecare de dimensiuni $4 \times 10 \times 19$, sunt puse una peste alta formând un turn de 94 de cărămizi. Fiecare cărămidă poate fi poziţionată în aşa fel încât să contribuie cu 4, 10 sau 19 la înălţimea totală a turnului. Câte înălţimi diferite de turn se pot obţine folosind toate cele 94 de cărămizi?

Concurs SUA, 1994, VO 2010-2011, cls X, et ?

Soluţia 1:

Dacă cinci cărămizi dintr-un turn sunt orientate astfel încât fiecare să contribuie cu 10 la înălţimea totală a turnului, atunci acestea contribuie în total cu 50 la înălţimea turnului. Aceste cinci cărămizi pot fi reorientate astfel încât trei dintre ele să contribuie cu 4 la înălţimea turnului, iar celelalte două să contribuie cu 19 la înălţimea turnului. Observăm că prin această reorientare înălţimea totală a turnului nu s-a modificat. Prin urmare, putem presupune că în turn sunt 0, 1, 2, 3 sau 4 cărămizi orientate astfel incât ele să contribuie cu muchia de lungime 10 la înălţimea turnului. Toate celelalte cărămizi sunt orienate în aşa fel încât să contribuie fie cu 4, fie cu 19 la înălţimea turnului.

Presupunem că avem $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cărămizi care contribuie cu 10 şi x cărămizi care contribuie cu 19 la înălţimea turnului. Atunci avem $94 - x - r$ cărămizi care contribuie cu 4 la înălţimea turnului. Prin urmare turnul va avea înălţimea $10r + 19x + 4(94 - x - r) = 376 + 15x + 6r$. Observăm că pentru două alegeri diferite ale numărului de cărămizi din fiecare tip se obţin turnuri de înăltimi diferite: dacă $376 + 15x + 6r = 376 + 15x' + 6r'$, rezultă $5(x - x') = 2(r' - r)$, de unde $5 \mid (r - r')$. Rezultă $r = r'$ (căci $r, r' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$), apoi $x = x'$. Prin urmare sunt tot atâtea înălţimi posibile ale turnului câte alegeri posibile ale perechii (x, r) există, cu $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şi $x \in \mathbb{N}$ cu $x + r \le 94$. Pentru fiecare $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ fixat avem $x \in \{0, 1, ..., 94 - r\}$, deci x ia $95 - r$ valori. Prin urmare sunt 95 de perechi cu $r = 0$, 94 de perechi cu $r = 1$, 93 de perechi cu $r = 2$, 92 de perechi cu $r = 3$ şi 91 de perechi cu $r = 4$, adică, în total, $95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 465$ de asemenea perechi, deci 465 de înălţimi posibile ale turnului.

Soluţia 2:

Notăm cu x, y, z numărul de cărămizi care contribuie cu 4, cu 10, respectiv cu 19 la înălţimea totală a turnului. Atunci $x + y + z = 94$ şi înălţimea turnului este $4x + 10y + 19z = 4(94 - y - z) + 10y + 19z = 376 + 3(2y + 5z)$. Problema revine la a determina câte valori diferite ia expresia $2y + 5z$ cu $y, z \in \mathbb{N}$ cu $y + z \le 94$. În orice caz, $2y + 5z \le 5(y + z) \le 5 \cdot 94 = 470$.
Pentru a număra valorile posibile ale lui $2y + 5z$ folosim:

Teorema francaturilor Având timbre de a lei şi de b lei în cantităţi nelimitate, numim francatură orice sumă care se poate pune în timbre pe un plic, adică orice număr de forma $ma + nb$ cu $m, n \in \mathbb{N}$.
Dacă $(a, b) = 1$ atunci numărul non-francaturilor este $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$ şi cea mai mare non-

francatură este $(a-1)(b-1)$.

Aplicând această teoremă cu $a=2$, $b=5$, rezultă că avem $(2-1)(5-1)/2=2$ non-francaturi mai mici decât $(2-1)(5-1)=4$ (anume 1 şi 3). Toate celelalte numere între 4 şi 470 se scriu sub forma $2y+5z$ cu $y,z \in \mathbb{N}$, dar nu neapărat cu $y+z \leq 94$. Înlocuind $z=94-x-y$, constatăm că un număr n cuprins între 4 şi 470 este francatură ,,bună" (adică un $2y+5z$ cu $y+z \leq 94$) dacă şi numai dacă $470-n=5x+3y$, cu $x,y \in \mathbb{N}$. Folosind din nou teorema francaturilor pentru $a=5$, $b=3$, deducem că avem $(3-1)(5-1)/2=4$ non-francaturi (pentru 3 şi 5, adică francaturi ,,proaste" pentru 2 şi 5) mai mici decât $(3-1)(5-1)$ adică 4 numere proaste între 463 şi 470 (acestea sunt 463, 466, 468 şi 469). Prin urmare dintre cele 471 de numere de la 0 la 470, şase nu sunt francaturi ,,bune" (1, 3, 463, 466, 468, 468), deci rămân $471-6=465$ de francaturi bune, adică de înălţimi posibile de turn.

Observaţie: Numărul de înălţimi posibile este egal cu numărul de termeni din dezvoltarea lui $(x^4+x^{10}+x^{19})^{94}$. Mai mult, coeficientul lui x^n din dezvoltarea de mai sus indică numărul de moduri diferite prin care se poate obţine un turn de înălţime n.