UŞOARE

1. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, iar G, H, I, J, K şi L mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$ şi respectiv $[FA]$. Segmentele $[AH]$, $[BI]$, $[CJ]$, $[DK]$, $[EL]$ şi $[FG]$ mărginesc un hexagon mai mic. Aflaţi raportul dintre aria acestui hexagon şi aria hexagonului $ABCDEF$.

Concurs SUA, 2010, VO 2010-2011, cls. VIII, et ?

Soluţie:

Mai întâi arătăm că hexagonul mic este regulat, apoi vom calcula raportul cerut prin două metode.

Să notăm cu M, N, O, P, Q, R vârfurile hexagonului mic ($\{M\} = AH \cap FG$, $\{N\} = BI \cap AH$, etc) şi cu ℓ lungimea laturii hexagonului mare. Atunci triunghiurile ABH, BCI ş.a.m.d. sunt congruente (LUL). De aici obţinem congruenţa unghiurilor $\sphericalangle BAH$, $\sphericalangle CBI$, etc respectiv a unghiurilor $\sphericalangle FGA$, $\sphericalangle AHB$, etc. Atunci triunghiurile mici AMG, BNH, etc sunt congruente (ULU). Obţinem de aici congruenţa unghiurilor hexagonului mic şi faptul că acesta are toate laturile egale (ca diferenţe de lungimi de segmente congruente). Prin urmare hexagonul mic este regulat. Raportul dintre ariile celor două hexagoane este pătratul raportului dintre lungimile laturilor (asta se vede şi mai bine descompunând fiecare din cele două hexagoane în 6 triunghiuri echilaterale).

Metoda 1: Cu teorema cosinusului (teorema generalizată a lui Pitagora) în ΔABH obţinem $AH^2 = AB^2 + BH^2 + 2 \cdot AB \cdot BH \cdot \cos 60° = \ell^2 + \dfrac{\ell^2}{4} + 2 \cdot \ell \cdot \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{7\ell^2}{4}$, deci $AH = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{2}$.
Din $\Delta ABH \sim \Delta AMG$ rezultă $\dfrac{MG}{BH} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $AM = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{7}$, $NH = MG = \dfrac{\ell\sqrt{7}}{14}$ şi $MN = AH - AM - NH = \dfrac{2\ell\sqrt{7}}{7}$. În fine, $\dfrac{\mathscr{A}_{MNOPQR}}{\mathscr{A}_{ABCDEF}} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 = \dfrac{4}{7}$.

Metoda 2: (mai lungă dar fără prea multe calcule)
Din $\Delta ABH \sim \Delta AMG$ rezultă $\dfrac{AM}{MG} = \dfrac{AB}{BH} = 2$, deci $AM = 2MG$.
Inspiraţi de o problemă asemănătoare (pe care o vom prezenta la sfârşitul acestei rezolvări), considerăm simetricele M', N', O', P', Q', R' ale punctelor M, N, O, P,
Q, R faţă de punctele G, H, I, J, K şi respectiv L. Deoarece $\Delta AMG \equiv \Delta BM'G$ (şi analoagele), putem ,,muta" ariile triughiuleţelor AMB, BNH, COI, DFJ, EQK şi FRL în exteriorul hexagonului mare şi obţine că aria hexagonului mare este egală cu suma dintre aria hexagonului mic şi ariile trapezelor $MNBM'$, $NOCN'$, etc. Acestea sunt într-adevăr trapeze deoarece $AMBM'$ este, din construcţie, paralelogram. În plus, cum $AM = 2GM = MM'$ şi $BN = AM$, avem $MM' = M'B = BH$. Dacă notăm $\{S\} = MG \cap BN$, triunghiurile SMN şi $SM'B$ vor fi echilaterale, de unde $SB = M'B = BH$ deci $M'B$ este linie mijlocie în ΔSMN. Atunci $\mathscr{A}_{SM'B} = \dfrac{1}{4} \cdot \mathscr{A}_{SMN}$, deci $\mathscr{A}_{MNBM'} = \dfrac{3}{4} \cdot \mathscr{A}_{SMN} = \dfrac{3S}{4}$ unde am notat cu S aria triunghiului echilateral de latură MN. Descompunând hexagonul $MNOPQR$ în 6 triunghiuri echilaterale de latură MN, obţinem $\mathscr{A}_{MNOPQR} = 6S$ şi $\mathscr{A}_{ABCDEF} = 6S + 6 \cdot \dfrac{3S}{4} = \dfrac{21S}{2}$, de unde concluzia.

Problema care a inspirat construcţia de la Metoda 2 este una foarte asemănătoare:

Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA.
Arătaţi că intersecţiile dreptelor AN, BP, CQ, DM determină un paralelogram şi calculaţi raportul dintre aria acestui paralelogram şi aria paralelogramului $ABCD$.

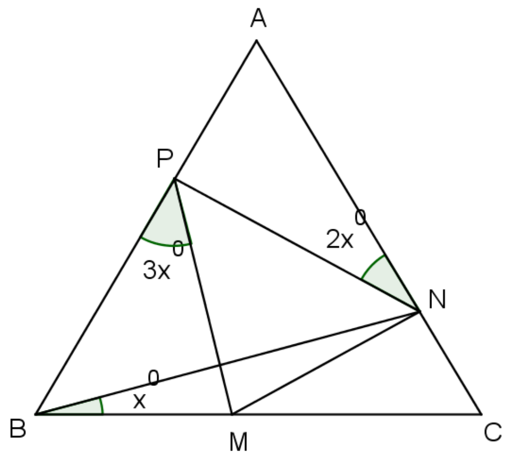
Soluţie:
Notând cu $\{X\} = AN \cap DM$, $\{Y\} = AN \cap BP$, $\{Z\} = BP \cap CQ$, $\{T\} = CQ \cap DM$ şi cu X', Y', Z', T' simetricele acestor puncte faţă de M, N, P respectiv Q, obţinem 8 triunghiuri congruente: AXM, $BX'M$, BYN, $CY'N$, etc. Înlocuind atunci ariile celor 4 triunghiuri aflate

în interiorul paralelogramului $ABCD$ cu ariile celor 4 triunghiuri situate în exteriorul acestuia, obţinem că aria lui $ABCD$ este suma ariilor a 5 paralelograme congruente: $XYZT$, $XYBX'$, $YZCY'$, $ZTDZ'$ şi $TXAT'$. Prin urmare, fără niciun calcul, rezultă că raportul dintre aria paralelogramului mic şi aria paralelogramului mare este $\frac{1}{5}$.

2. Fie triunghiul echilateral ABC.
Pe laturile (BC), (CA), (AB) se consideră punctele M, N şi P, asfel încât: $m(\widehat{NBC}) = x°$, $m(\widehat{ANP}) = 2x°$, $m(\widehat{BPM}) = 3x°$.
a) Arătaţi că triunghiul BPN este isoscel.
b) Dacă $x = 15°$, demonstraţi că $MN \perp AC$.

Mircea Fianu, Bucureşti, VO 2011-2012, et 2, cls VII, pb 2

Soluţie



a) Unghiul BNA este exterior triunghiului BNC şi atunci

$$m(\widehat{BNA}) = 60° + x°.$$

Cum

$$m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{BNA}) - m(\widehat{PNA})$$

deducem că

$$m(\widehat{PNB}) = 60° - x° \qquad (1).$$

Pe de altă parte,

$$m(\widehat{PBN}) = m(\widehat{PBC}) - m(\widehat{NBC})$$

adică

$$m(\widehat{PBN}) = 60° - x° \qquad (2).$$

Din (1) şi (2) deducem că triunghiul BNP este isoscel, cu $[PB] \equiv [PN]$.
b) Dacă $x = 15°$ atunci $m(\widehat{PNB}) = m(\widehat{PBN}) = 45°$ şi $m(\widehat{BPM}) = 45°$.

Din $m(\widehat{BPM}) = 45°$ şi $m(\widehat{PBN}) = 45°$ rezultă $PM \perp BN$ şi cum $m(\widehat{PNB}) = 45°$ obţinem că $m(\widehat{NPM}) = 45°$.
Acum, din $[PB] \equiv [PN]$; $[PM]$ latură comună şi
$\widehat{BPM} \equiv \widehat{NPM}$ $(= 45°)$ deducem că $\triangle PBM \equiv \triangle PNM$, de unde $m(\widehat{PNM}) = 60° \quad (3)$.

Din (3), folosind faptul că $m(\widehat{PNA}) = 30°$, obţinem că
$m(\widehat{ANM}) = 90°$, adică $MN \perp AC$.

3. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe laturile AB şi AC se construiesc, în exterior, triunghiurile isoscele ABD şi ACE astfel încât $AB = AD$, $AC = AE$, iar unghiurile DAB şi CAE să fie suplementare. Demonstraţi că $AM = \frac{1}{2} \cdot DE$.

Olimpiadă Leningrad (Sankt Petersburg), VO 2011-2012, cls VII, et 3, pb 3

Soluţie. Fie N simetricul lui A faţă de M.
În patrulaterul $ABNC$ diagonalele se înjumătăţesc, deci
$ABNC$ este paralelogram.
Atunci $BN = AC = AE$, $AB = AD$ şi
$m(\sphericalangle ABN) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC)$.
În plus, $m(\sphericalangle DAE) = 360^\circ - m(\sphericalangle BAC) - \big(m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle CAE)\big) = 360^\circ - m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ = m(\sphericalangle ABN)$.
Din cele de mai sus rezultă că $\Delta ABN \equiv \Delta DAE$ (LUL).
Atunci $AN = DE$, de unde $AM = \frac{1}{2} AN = \frac{1}{2} DE$.

Soluţie alternativă. (la nivel de clasa a VIII-a, dar primită de la mulţi copii; schiţă)
Se scrie teorema cosinusului în triunghiurile ABC şi ADE şi se ţine seama de faptul că $AD = AB$, $AE = AC$ şi că unghiurile $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle DAE$ sunt suplementare. Adunând relaţiile obţinute, rezultă $DE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, de unde, folosind teorema medianei, rezultă $DE^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 4AM^2$ şi concluzia.

Observaţie. Condiţia ca triunghiul să fie ascuţitunghic este inutilă.

4. În patrulaterul $ABCD$, AD este paralelă cu BC, iar K este un punct pe latura $[AB]$. Arătaţi că paralela prin A la KC şi paralela prin B la KD se intersectează într-un punct de pe $[CD]$.

Concurs Canada, 2011-2012, cls 7, et 5, pb 2

Soluţie. Fie $\{R\} = CK \cap AD$, $\{T\} = DK \cap BC$, X punctul de intersecţie al paralelei din B la KD cu CD, iar Y punctul de intersecţie al paralelei din A la CK cu CD. Atunci $\dfrac{DX}{XC} = \dfrac{BT}{BC}$ (1) şi $\dfrac{DY}{YC} = \dfrac{DA}{RA}$ (2). Pe de altă parte, $\dfrac{RA}{BC} = \dfrac{AK}{BK} = \dfrac{DA}{BT}$, de unde $\dfrac{DA}{RA} = \dfrac{BT}{BC}$ (3).
Din (1), (2) şi (3) obţinem $\dfrac{DX}{XC} = \dfrac{DY}{YC}$ şi, cum $X, Y \in [CD]$, rezultă $X = Y$, adică punctele în care paralelele din A la CK şi din B la DK taie CD coincid.

5. Fie a un număr real. Arătaţi că aria triunghiului cu lungimile laturilor $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$ nu depinde de a.

Marcel Chiriţă, Bucureşti, 2011-2012, cls 7-8, et 7, pb 2

Soluţie. vezi GM 789/2009

6. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar $S \in (BC)$ un punct mobil. Arătaţi că $(MB - MS)(NC - NS) \leq 0$. În ce caz avem egalitate ?

Gh. Szöllősy, Sighetu Marmaţiei

Soluţie. Notăm $P(S) = (MB - MS)(NC - NS)$ şi D piciorul perpendicularei din A pe BC. Avem evident $MB = MD$ şi $CN = DN$. Dacă $S \in (BD)$ avem $MB > MS$ şi $NC < NS$, deci $P(S) < 0$. Dacă $S \in (DC)$ avem $MB < MS$ şi $NC > NS$, deci $P(S) < 0$. Egalitatea are loc dacă $S = D$.

7. În triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, mediatoarea laturii AB intersectează pe (BC) în punctul T. În punctul A construim $DA \perp (ABC)$ şi notăm cu P, respectiv N proiecţiile punctului A pe dreptele DT, respectiv DC. Arătaţi că punctele B, P, N sunt coliniare.

Ion Tudor, 2011-2012, cls 8, et 7, pb 4

Soluţie. Vom folosi teorema reciprocă a teoremei lui Menelaus în triunghiul DCT. Va trebui să demonstrăm că $\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DP}{PT} = 1$. În $\triangle DTA$, $(m(\widehat{A}) = 90^\circ)$, din teorema catetei avem $AD^2 = DP \cdot DT$ şi $AT^2 = PT \cdot DT$, de unde $\frac{DP}{PT} = \frac{AD^2}{AT^2}$. Analog, din $\triangle DAC$ obţinem $\frac{CN}{ND} = \frac{AC^2}{AD^2}$. De aici avem $\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT}{BC} \cdot \frac{AC^2}{AD^2} \cdot \frac{AD^2}{AT^2} = \frac{BT \cdot AC^2}{BC \cdot AT^2}$.
Pe de altă parte, deoarece T aparţine mediatoarei segmentului $[AB]$, avem $[AT] \equiv [BT]$ şi $\triangle ABC \sim \triangle TAB$. Din asemănarea celor două triunghiuri obţinem $AC^2 = BT \cdot BC$.
Cu acestea avem $\frac{BT}{BC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DP}{PT} = \frac{BT \cdot AC^2}{BC \cdot AT^2} = \frac{BT \cdot BT \cdot BC}{BC \cdot BT^2} = 1$.
Din ultima relaţie deducem că punctele B, P, N sunt coliniare.

MEDII

1. Fie M un punct în interiorul paralelogramului $ABCD$.
Arătaţi că $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD$.

* * *, VO 2010-2011

Soluţia 1:

O soluţie scurtă şi elegantă se bazează pe următoarea contrucţie:
Considerăm punctul P astfel ca $ADMP$ să fie paralelogram. Având laturile (opuse) MP şi BC paralele şi congruente, $PMBC$ este şi el paralelogram. Atunci
$\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA \iff \sphericalangle MPA \equiv \sphericalangle MBA \iff AMBP$ este inscriptibil $\iff \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCB \iff \sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD$.

Observaţii: **1.** O problemă foarte asemănătoare s-a dat anul trecut la etapa finală a concursului Gazeta Matematică - viitoriolimpici.ro (problema 1 de la clasa a IX-a), vezi Gazeta Matematică seria B, nr. 11/2010.
2. Vă mai semnalăm o problemă care se poate rezolva uşor cu ajutorul construcţiei de mai sus: *Fie M un punct în interiorul paralelogramului $ABCD$. Arătaţi că*

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \geq \mathscr{A}_{ABCD}.$$

Tot pe această temă vă propunem şi problema **E.82.** din RMT nr. 2/2011.

Soluţia 2: (dată de Ştefan Vrânceanu)

Fie P, Q, R, S proiecţiile punctului M pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Se formează patrulaterele inscriptibile (posibil degenerate dacă una din proiecţii cade într-unul din vârfurile paralelogramului) $MRDS$ şi $MPBQ$ (ordinea punctelor poate să nu fie asta). Avem $\sphericalangle MRS \equiv \sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle MQP$, de unde rezultă că patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil.
Analog se demonstrează echivalenţa $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCD \iff$ patrulaterul $PQRS$ este inscriptibil, de unde concluzia.

Soluţia 3: (schiţă)

Vom demonstra numai prima implicaţie, cea de-a doua fiind similară.
Dacă $M \in BD$ atunci $ABCD$ este romb şi afirmaţia este imediată.
În continuare vom presupune că $M \in Int(\Delta ABC)$. În celălalt caz figura este diferită dar afirmaţiile de mai jos rămân adevărate (argumentele se modifică puţin). Se consideră $\{P\} = AD \cap BM$ şi $\{Q\} = AB \cap DM$. Se arată succesiv că:
- patrulaterul $BDPQ$ este inscriptibil;
- $\Delta\, APQ \sim \Delta\, ABD$ (UU);
- $\Delta\, MPQ \sim \Delta\, MDB$ (UU);
- $\Delta\, MPA \sim \Delta\, MDC$ (scriind rapoartele egale din asemănările de mai sus);
- $\sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle MCD$.

Am mai primit şi alte soluţii foarte bune bazate pe asemănare.
De asemenea, am primit şi soluţii cu teorema sinusurilor (vezi şi remarca din GM nr. 11/2010 privitoare la rezolvarea problemei date la concursul GM-viitoriolimpici.ro).

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctul $M \in (BD)$. Demonstraţi că
$MB \cdot MD \leq MA \cdot MC$ şi precizaţi când are loc egalitatea.

Claudiu-Ştefan Popa, 2012, cls 7, etapa finală

Soluţie.
Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Dacă $M = O$ avem evident relaţia din enunţ.
Dacă $M \neq O$, de exemplu $M \in (OB)$, atunci considerăm punctul E intersecţia semidreptei $(AM$ cu cercul circumscris dreptunghiului. Din puterea punctului M, avem $MB \cdot MD = MA \cdot ME$.**2 puncte**
Vom arăta că $ME < MC$. Considerând cercul cu centrul în M şi de rază ME, acest cerc intersectează cercul circumscris dreptunghiului în E şi în simetricul acestuia faţă de OB. Prin urmare punctul C se află în exteriorul cercului cu centrul în M şi de rază ME, deci $ME < MC$. . . . . . **4 puncte**
Prin urmare egalitate avem dacă şi numai dacă $M = O$. . . . . **1 puncte**

4. Trei cercuri concentrice au razele 1, 2 şi 3. Pe fiecare din aceste cercuri se consideră câte un punct astfel încât cele trei puncte să fie vârfurile unui triunghi echilateral. Ce valori poate lua lungimea laturii acestui triunghi?

$* * *$, 2012, cls 8, faza finală

Soluţie.
Fie O centrul cercurilor si $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral cu A_i pe cercul de rază i $(i = 1, 2, 3)$. Deoarece $OA_3 = OA_1 + OA_2$, rezultă că $A_1OA_2A_3$ e inscriptibil (din teorema lui Ptolemeu sau van Schooten) şi că $m(A_1OA_2) = 120°$. . . . . **5 puncte**
Atunci $A_1A_2^2 = 1^2 + 2^2 + 1 \cdot 2 = 7$, adică $A_1A_2 = \sqrt{7}$. Deci mulţimea valorilor posibile ale lungimii laturilor unui asemenea triunghi echilateral este inclusă în mulţimea $\{\sqrt{7}\}$. Este uşor de construit efectiv un asemenea triunghi: se ia A_3 arbitrar pe cercul mare, apoi A_1 şi A_2 pe cele două semidrepte care fac unghi de $60°$ cu $(OA_3$. Triunghiul obţinut este într-adevăr echilateral. **2 puncte**

GRELE