ViitoriOlimpici - Probleme de combinatorică

UŞOARE

1. Spunem că un triplet ordonat (A, B, C) de mulţimi *are intersecţie minimală* dacă $A \cap B \cap C = \varnothing$, iar mulţimile $A \cap B$, $B \cap C$ şi $C \cap A$ au câte un element.
De exemplu, tripletul $(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\})$ are intersecţie minimală.
Câte triplete cu intersecţie minimală, în care fiecare din mulţimile A, B, C este o submulţime a lui $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, există?

Concurs AIME, SUA, 2010, VO 2010-2011, clasa a IX-a, et ?

Soluţie:

Alegem mai întâi elementul (unic) al mulţimii $A \cap B$. Această alegere poate fi făcută în 7 moduri. Alegem apoi, din cele 6 numere rămase, elementul (unic) al mulţimii $B \cap C$. Această alegere poate fi făcută în 6 moduri. Alegem, din cele 5 numere rămase, elementul (unic) al mulţimii $A \cap C$. Această alegere poate fi făcută în 5 moduri. Rămân 4 numere. Fiecare din aceste numere va ajunge într-una din următoarele 4 mulţimi: $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (C \cup A)$, $C \setminus (A \cup B)$ şi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus (A \cup B \cup C)$. Aşadar pentru fiecare din cele 4 numere rămase există 4 variante. În total sunt aşadar $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^4 = 53760$ de triplete cu intersecţie minimală formate din submulţimi ale lui $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Problemă. Putem pava o podea 100×100 folosind un număr egal de dale pătrate 3×3 şi 1×1?

Andrei Eckstein, 2011-2012, cls 7, et 5, pb 4

Soluţie. Vom arăta că răspunsul la întrebarea din enunţ este afirmativ. Vom indica o modalitate de a pava podeaua.
Putem pava un dreptunghi 10×3 cu 3 dale 3×3 şi 3 dale 1×1, deci putem pava şi un dreptunghi 100×3 folosind câte 30 de dale din fiecare tip.
De asemenea, putem pava un dreptunghi 25×16 astfel: colţul 24×15 din dreapta sus îl pavăm cu $8 \cdot 5 = 40$ dale 3×3. Cele 40 de pătrate rămase (pe marginea din stânga şi cea de jos a pătratului 25×16) le pavăm cu dale 1×1. Folosind 28 de dreptunghiuri 100×3 şi un dreptunghi 100×16 (obţinut prin lipirea a patru dreptunghiuri 25×16) vom putea pava podeaua 100×100.

3. În vârfurile unui cub se scriu numerele de la 1 la 8, apoi pe fiecare din muchiile acestuia se scrie modulul diferenţei numerelor scrise în vârfurile din capetele acesteia. Care este numărul minim de numere diferite care pot fi obţinute pe muchii?

Olimpiadă Rusia, 2011-2012, cls VIII, et 5, pb 1

Soluţie.
Pe cele trei muchii care pleacă din vârful în care este scris numărul 8 sunt scrise trei numere diferite, deci minimul căutat este cel puţin 3.
Pe de altă parte, este uşor de construit un exemplu de cub
$ABCDA'B'C'D'$ în care pe muchii figurează exact 3 numere diferite. Iată un asemenea exemplu: $A(1)$, $B(2)$, $C(4)$, $D(3)$, $A'(5)$, $B'(6)$, $C'(8)$, $D'(7)$ unde numărul din paranteză indică numărul care se scrie în vârful respectiv. Pe muchii se obţin numerele 1, 2 şi 4.

4. Determinaţi numărul perechilor de mulţimi $(A,\ B)$ care îndeplinesc simultan condiţiile:
a) $A \cup B \subseteq \{1,\ 2,\ ...,\ 2012\}$,
b) $A \cap B \subseteq \{1,\ 2,\ ...,\ 1006\}$,
c) $A \setminus B \neq \varnothing$.

Manuela Prajea, 2012, faza finală

Soluţie.
Numărăm mai întâi perechile $(A,\ B)$ care îndeplinesc condiţiile a) şi b). Pentru fiecare din numerele 1, 2, 3, ... , 1006 sunt 4 variante: el poate aparţine lui $A \setminus B$, lui $A \cap B$, lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Pentru fiecare din numerele 1007, 1008, 1009, ... , 2012 sunt 3 variante: el poate aparţine lui $A \setminus B$, lui $B \setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Aşadar sunt $4^{1006} \cdot 3^{1006}$ asemenea perechi de mulţimi..**4 puncte**
Dintre aceste perechi trebuie eliminate perechile pentru care $A \setminus B = \varnothing$. Să numărăm aceste perechi:

Pentru fiecare din numerele 1, 2, 3, ... , 1006 sunt 3 variante: el poate aparţine lui $A\cap B$, lui $B\setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Pentru fiecare din numerele 1007, 1008, 1009, ... , 2012 sunt 2 variante: el poate aparţine lui $B\setminus A$ sau să nu aparţină nici lui A, nici lui B. Aşadar sunt $3^{1006}\cdot 2^{1006}$ perechi de mulţimi care nu satisfac c). Prin urmare sunt $4^{1006}\cdot 3^{1006} - 3^{1006}\cdot 2^{1006}$ perechi care satisfac cele trei proprietăţi..**3 puncte**

MEDII

1. Un dreptunghi 2010×1000 este împărţit în pătrăţele unitate. Construim una din diagonalele dreptunghiului. Câte pătrăţele unitate traversează diagonala?
(Pătrăţelele care au un singur punct comun cu diagonala nu vor fi numărate.)

* * *, VO 2010-2011, cls VII, et: ?

Soluţie:

Să presupunem că diagonala uneşte colţul din stânga jos al dreptunghiului cu colţul din dreapta sus şi că parcurgem această diagonală pornind din colţul din stânga jos. Fie A mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le traversează şi pe care le părăseşte prin latura de sus a acestora, iar B mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le traversează şi pe care le părăseşte prin latura din dreapta a acestora. Numărul căutat este $Card(A\cup B) = Card\,A + Card\,B - Card(A\cap B)$.
În drumul ei, diagonala va traversa 2010 linii orizontale, deci va părăsi 2010 pătrate unitate prin latura de sus a acestora. Aşadar $Card\,A = 2010$. (Fiecare traversare a unei linii orizontale corespunde unei schimbări de pătrăţel.) Similar, în drumul ei, diagonala va traversa 1000 de linii verticale, deci va părăsi 1000 de pătrate unitate prin latura din dreapta a acestora. Aşadar $Card\,B = 1000$.
Mai trebuie să evaluăm $Card(A\cap B)$. $A\cap B$ reprezintă mulţimea pătratelor unitate pe care diagonala le părăseşte prin colţul din dreapta sus al acestora. Dacă diagonala traversează simultan linia orizontală cu numărul n şi linia verticală cu numărul m atunci avem (din teorema fundamentală a asemănării) că

$$\frac{n}{2010} = \frac{m}{1000}\,.$$

Deducem că $100n = 201m$ şi, cum $(100, 201) = 1$, rezultă $m = 100k$, apoi $n = 201k$. Deoarece $0 < n \leq 2010$ şi $0 < m \leq 1000$, deducem că $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, deci sunt 10 pătrate pe care diagonala le părăseşte prin colţul din dreapta sus. Aşadar $Card(A\cap B) = 10$ şi $Card(A\cup B) = 2010 + 1000 - 10 = 3000$.

2. Pe o tablă pătrată împărţită în 15×15 pătrăţele sunt aşezate 15 turnuri care nu se atacă unul pe altul. Apoi fiecare turn face o mutare de cal. Arătaţi că acum există cel puţin o pereche de turnuri care se atacă reciproc.

Tournament of the Towns, 2001, VO 2010-2011, cls IX, et ?

Soluţie: Numerotăm liniile şi coloanele tablei de la 1 la 15. Faptul că turnurile sunt aşezate pe tablă astfel încât ele nu se atacă unul pe altul înseamnă că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană se găseşte iniţial exact un turn. Dacă notăm cu x_i numărul liniei pe care se află turnul cu numărul i şi cu y_i numărul coloanei pe care se află turnul cu numărul i atunci avem $S = (x_1+x_2+...+x_{15})+(y_1+y_2+...+y_{15}) = (1+2+...+15)+(1+2+...+15) = 15\cdot 16 = 240$.
Atunci când un turn efectuează o mutare de cal, el îşi modifică linia cu 2 şi coloana cu 1 sau invers, adică modifică suma $x_i + y_i$ cu 1 sau 3, prin urmare suma $x_i + y_i$ îşi schimbă paritatea. Deoarece avem un număr impar de turnuri şi fiecare din ele îşi schimbă paritatea sumei $x_i + y_i$, rezultă că şi paritatea sumei S se va modifica. Dar am văzut că o condiţie necesară pentru ca turnurile să nu se atace este ca $S = 240$. Ori S devine impar, deci această condiţie necesară nu este îndeplinită după ce toate turnurile fac mutări de cal. Prin urmare vor exista cel puţin două turnuri care se atacă reciproc.

3. Se consideră şirul a_1, a_2, a_3, ... definit astfel: $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$ şi pentru $n \geq 5$, n număr natural, a_n se defineşte ca fiind ultima cifră a sumei celorlalţi patru termeni precedenţi. Astfel, prin concatenare, şirul devine: 61052850... .
Arătaţi că secvenţa 2012 este în şir.

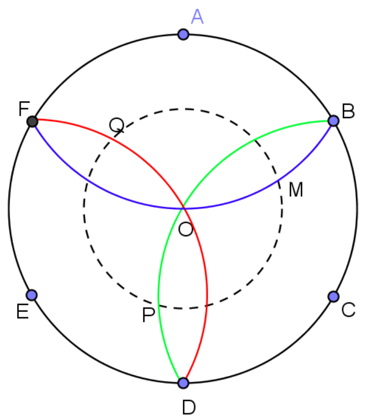
Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin, VO 2011-2012, et 2, cls 7-8, pb 1

Soluţie. Considerăm toate grupurile de patru cifre consecutive disjuncte care apar în şir. Adică: 6105, 2850, 5881, ... şi cum sunt 10^4 grupuri de patru cifre posibile, deducem că la un moment dat un grup de patru cifre se va repeta, de exemplu $\overline{abcd}$. Din regula de definire a şirului deducem că următoarele cifre care vor apărea după grupul $\overline{abcd}$ vor fi unic determinate de aceste patru cifre, deci şi acestea se vor repeta, adică dacă după grupul $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, atunci din nou după apariţia grupului $\overline{abcd}$ va apărea grupul $\overline{efgh}$, etc şi şirul devenind astfel, de la un moment dat, periodic. De fapt, din modul în care este definit şirul, se vede că şi termenii care preced un grup $\overline{abcd}$ sunt unic determinaţi de cifrele a, b, c, d, deci cifrele care preced un grup $\overline{abcd}$ vor fi mereu aceleaşi pentru fiecare repetare a grupului $\overline{abcd}$. De aici rezultă că şirul este periodic de la început. Prin urmare grupul 6105 va mai apărea în şir. Ne uităm la a doua apariţie a grupului 6105. Aplicând regula de determinare a termenilor şirului, deducem că termenii din stânga grupului 6105 sunt în ordine: 8, apoi 5, apoi 2, apoi 1, apoi 0, apoi 2, etc, deci o secvenţă din şir este: ...$\underline{2012}$586105..., adică secvenţa 2012 este în şirul dat.

4. Se colorează punctele unui cerc de rază 1 (din interior şi de pe frontieră) cu 3 culori. Arătaţi că există o infinitate de segmente de lungime 1 având extremităţile de aceeaşi culoare.

Manuela Prajea, Drobeta-Turnu Severin, VO 2011-2012, et 2, pb 3

Soluţie. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris în cercul dat, O centrul acestuia şi $M_1,\ M_2,\ M_3$ mulţimile de puncte colorate cu cele trei culori date.
Presupunem, prin absurd, că nu există două puncte colorate la fel, situate la distanţă 1.
Dacă $O \in M_1$, atunci $A,\ C,\ E \in M_2$ şi $B,\ D,\ F \in M_3$.



Considerăm cercul $C\left(O; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Acesta va intersecta cercurile $C(A;1)$, $C(C;1)$, $C(E;1)$ în punctele $M,\ P$, respectiv Q, centrele triunghiurilor echilaterale BOC, DOE, respectiv FOA.
Punctele $M,\ P,\ Q$ nu sunt din mulţimea M_2 deoarece $AM = CP = EQ = 1$, iar $A,\ C,\ E \in M_2$. De asemenea, deoarece $DM = FP = BQ = 1$ şi $D,\ F,\ B \in M_3$, rezultă că $M,\ P,\ Q \notin M_3$. Rezultă atunci că $M,\ P,\ Q \in M_1$. Dar $\triangle MPQ$ este echilateral de latură 1 rezultă că există puncte de aceeaşi culoare situate la distanţa 1, contradicţie.
Aşadar, există două puncte de aceeaşi culoare la distanţă 1.
Rotind hexagonul iniţial astfel încât vârful A să parcurgă arcul AB vom obţine o infinitate de hexagoane şi de fiecare dată cel puţin un segment de lungime 1 cu capetele de aceeaşi culoare. Segmentele ,,monocolore" găsite nu se pot repeta, aşadar rotind hexagonul se găsesc o infinitate de segmente ,,monocolore" distincte.

5. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ care au proprietatea că există o mulţime de n puncte în plan având $\frac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie.

Manuela Prajea, VO 2011-2012, cls VIII, et 2, pb 4

Soluţie. ,,Dacă $n = 2$, atunci mulţimea $\{A_1,\ A_2\}$ are $\frac{2\cdot(2-1)}{2} = 1$ axe de simetrie este o afirmaţie falsă (o axă de simetrie este mediatoarea segmentului A_1A_2, dar şi dreapta A_1A_2 este axă de simetrie).
Dacă $n \geq 3$ notăm $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ o mulţime cu n puncte şi care are $\frac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie. Dacă o axă de simetrie conţine toate punctele din $\mathcal{A}$, atunci nu pot exista decât cel mult două axe de simetrie, absurd. Aşadar pentru fiecare axă de simetrie d există un punct $A \in \mathcal{A}$ nesituat pe d. Atunci şi simetricul lui A faţă de d aparţine lui $\mathcal{A}$, deci d este mediatoarea

segmentului determinat de o pereche de puncte din $\mathcal{A}$. Deoarece trebuie să avem $\frac{n(n-1)}{2}$ axe de simetrie, adică tocmai numărul perechilor de puncte (distincte) din $\mathcal{A}$, rezultă că axele de simetrie sunt exact mediatoarele segmentelor determinate de punctele din $\mathcal{A}$.
Fie m_{ij} mediatoarea unui segment A_iA_j. Dacă $A_k \in \mathcal{A}$, diferit de A_i şi A_j nu este situat pe mediatoara m_{ij}, notăm A_p simetricul lui A_k faţă de m_{ij}. Atunci $m_{ij} = m_{kp}$ şi numărul axelor de simetrie ar fi mai mic decât $\frac{n(n-1)}{2}$. În concluzie, $A_k \in m_{ij}$, adică toate punctele din $\mathcal{A}$, diferite de A_i şi A_j, se află pe mediatoarea m_{ij}.
Dar acest lucru este evident imposibil pentru $n > 3$, deci singura posibilitate este pentru $n = 3$, anume mulţimea $\mathcal{A}$ formată din vârfurile unui triunghi echilateral.

6. Avem şase bucăţi de caşcaval având greutăţi diferite. Pentru oricare două dintre ele se poate constata, ochiometric, care dintre ele este mai grea.
Se ştie că bucăţile de caşcaval pot fi împărţite în două grupuri de câte trei având aceeaşi greutate. Cum putem determina aceste grupuri din doar două cântăriri având la dispoziţie o balanţă fără greutăţi?

Turneul Oraşelor, 2011-2012, cls 8, et 5, pb 3

Soluţie. Putem ordona cele 6 bucăţi fără a efectua vreo cântărire: fie $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ greutăţile celor 6 bucăţi de caşcaval. Scriind egalitatea greutăţilor bucăţilor din cele două grupuri egale vom avea una din următoarele variante:

$$x_1 + x_2 + x_6 = x_3 + x_4 + x_5 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_3 + x_6 = x_2 + x_4 + x_5 \qquad (2)$$
$$x_1 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 + x_6 \qquad (3)$$
$$x_1 + x_4 + x_6 = x_2 + x_3 + x_5 \qquad (4)$$
$$x_1 + x_5 + x_6 = x_2 + x_3 + x_4. \qquad (5)$$

Pentru a vedea care variantă este cea corectă comparăm mai întâi, folosind balanţa, sumele $x_1 + x_4 + x_6$ şi $x_2 + x_3 + x_5$. Dacă ele sunt egale, am găsit cele două grupuri căutate.
Dacă $x_1 + x_4 + x_6 < x_2 + x_3 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în variantele (1), (2) şi (3) primul grup fiind mai uşor decât al doilea. În acest caz, rezultă că avem egalitate în varianta (5).
Dacă $x_1 + x_4 + x_6 > x_2 + x_3 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în varianta (5). Comparăm acum, printr-o a doua cântărire, grupurile $x_1 + x_3 + x_6$ şi $x_2 + x_4 + x_5$. Dacă ele sunt egale, atunci am terminat.
Dacă $x_1 + x_3 + x_6 < x_2 + x_4 + x_5$ atunci nu putem avea egalitate nici în varianta (1), deci trebuie să avem egalitate în varianta (3).
Dacă $x_1 + x_3 + x_6 > x_2 + x_4 + x_5$ atunci avem şi $x_1 + x_4 + x_5 < x_2 + x_3 + x_6$, deci trebuie să avem egalitate în varianta (1).

7. Determinaţi valorile numărului natural n pentru care putem pava o podea $n \times n$ folosind un număr egal de dale pătrate 2×2 şi 1×1.

Andrei Eckstein, 2011-2012, cls 8, et 5, pb 4

Soluţie. Presupunând că o podea $n \times n$ poate fi pavată folosind k dale 2×2 şi k dale 1×1, din motive de arie trebuie să avem $n^2 = k \cdot 2^2 + k \cdot 1^2 = 5k$, deci $5 \mid n$.
Vom arăta că dacă $5 \mid n$ şi $n \neq 5$ atunci podeaua $n \times n$ poate fi pavată respectând cerinţele din enunţ. De asemenea, vom arăta că un pătrat 5×5 nu poate fi pavat.
Observăm mai întâi că un dreptunghi 5×2 poate fi pavat uşor cu două dale 2×2 şi două dale 1×1. Folosind astfel de dreptunghiuri, putem pava orice dreptunghi $(5j) \times (2k)$ folosind un număr egal de dale 2×2 şi 1×1. În particular, putem pava orice podea $(10\ell) \times (10\ell)$.
O a doua observaţie importantă este că putem pava un dreptunghi 15×7 respectând condiţiile din enunţ. Vom pava „colţul" 14×6 din dreapta-sus cu $7 \cdot 3 = 21$ dale 2×2; restul de 21 de pătrate (marginea din stânga şi cea de jos a dreptunghiului 15×7) le pavăm cu dale 1×1.
Lipind lângă dreptunghiul 15×7 un dreptunghi 15×8, obţinem o pavare pentru pătratul 15×15. (Am văzut că putem pava „regulamentar" orice dreptunghi în care o dimensiune este multiplu de 5 şi cealaltă este pară.)
Pentru a pava podeaua $(10i + 15) \times (10i + 15)$, $i \in \mathbb{N}^*$, vom lipi mai întâi lângă pătratul 15×15 un dreptunghi $15 \times (10i)$ (care se poate pava pentru că $5 \mid 15$ şi $10i$ este par). Obţinem un dreptunghi $15 \times (10i + 15)$ care se poate pava. Lângă acesta lipim un dreptunghi $(10i) \times (10i + 15)$ (care

poate şi el fi pavat) obţinând o pavare pentru pătratul $(10i + 15) \times (10i + 15)$.
Am arătat aşadar că orice pătrat de dimensiune multiplu de 5, mai mare decât 5, poate fi pavat.
Pătratul 5×5 nu poate fi pavat. Dacă ar putea fi pavat, ar trebui pavat cu câte 5 dale din fiecare tip. Colorăm pătraţelele unitate ale pătratului 5×5 pe benzi verticale: alb-negru-alb-negru-alb. Atunci vom avea 15 pătrăţele albe şi 10 negre. O dală 2×2 acoperă, indiferent de poziţia în care e plasată, câte două pătrăţele din fiecare culoare. Rezultă că ele trebuie să acopere cele 10 pătrăţele negre, ceea ce nu se poate.

GRELE

1. Împărţim un poligon convex în triunghiuri ducând câteva diagonale care nu se intersectează în interior. În fiecare din vârfurile poligonului se înscrie numărul de triunghiuri formate care conţin acel vârf, apoi se şterg diagonalele. Este posibilă reconstituirea tuturor diagonalelor trasate folosind numai aceste numere?

Tournament of the Towns, 2001, VO 2010-2011, cls IX, et ?

Soluţie: Răspunsul este afirmativ. Vom indica mai jos un procedeu de reconstituire a diagonalelor.

Vom arăta mai întâi că, oricum ar fi trasate diagonalele, există un vârf marcat cu 1. Orice diagonală împarte poligonul în două poligoane cu un număr mai mic de laturi. Dintre toate aceste ,,semi-poligoane" îl alegem pe cel (unul dintre cele) care are număr minim de laturi. Să notăm cu AC o diagonală pentru care unul dintre ,,semi-poligoanele" determinate de AC are număr minim de laturi. Dacă în ,,semi-poligonul minimal" am putea să mai ducem o diagonală am obţine un...,,semi-semi-poligon" cu mai puţine laturi decât ,,semi-poligonul minimal", ceea ce ar contrazice alegerea lui AC. Prin urmare în ,,semi-poligonul" minimal nu mai putem duce diagonale deci acesta este un triunghi. Dacă notăm cu B cel de-al treilea vârf al acestui triunghi, vârful B intră într-un singur triunghi, deci poartă eticheta 1.

Iată cum putem reconstitui diagonalele folosind observaţia de mai sus:
Căutăm un vârf marcat cu 1 (există!). Fie acesta B şi să notăm cu A şi C vârfurile vecine. Atunci BA şi BC sunt laturi ale triunghiului din care face parte B, deci a treia latură a triunghiului va fi diagonala AC.
Am reconstituit aşadar O DIAGONALĂ. Acum ŞTERGEM PUNCTUL B şi scădem 1 din etichetele punctelor A şi C (pentru că nu mai luăm în considerare triunghiul ABC). Obţinem un poligon cu mai puţine laturi, care la rândul lui are un vârf marcat cu 1, deci putem continua procedeul până când ajungem la un triunghi când reconstituirea se încheie.