UŞOARE

1. Se consideră $a,\ b,\ c$ numere reale pozitive cu $abc = 1$. Să se arate că:

$$\frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ca} + \frac{c}{2+ab} \geq 1.$$

Manuela Prajea, VO 2011-2012, et 2, cls VIII, pb 1

Soluţie. Avem

$$\frac{a}{2+bc} + \frac{b}{2+ca} + \frac{c}{2+ab} = \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \overset{CBS}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3}.$$

Notând $s = a+b+c$, din inegalitatea mediilor şi $abc = 1$ avem $s \geq 3$. Folosind cele de mai sus, este suficient să arătăm că $\dfrac{s^2}{2s+3} \geq 1$ pentru orice $s \geq 3$. Acestă inegalitate se scrie echivalent $(s-1)^2 \geq 4$, ceea ce este evident pentru orice $s \geq 3$. Cu aceasta inegalitatea este demonstrată. Egalitate avem pentru $a = b = c = 1$.

2. Stabiliţi dacă există numere reale nenule $a_1, a_2, ..., a_{10}$ astfel incât

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot ... \cdot \left(a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot ... \cdot \left(a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right).$$

Olimpiadă Rusia, 2011-2012, cls VIII, et 5, pb 2

Soluţie. Presupunem că există $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{10} \in \mathbb{R}^*$ care verifică relaţia dată. Atunci, eliminând numitorii, am avea că

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1) \cdot ... \cdot (a_{10}^2+1) = (a_1^2-1)(a_2^2-1) \cdot ... \cdot (a_{10}^2-1). \qquad (1)$$

Dar $x^2 + 1 > |\,x^2 - 1\,|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, deci

$$(a_1^2+1)(a_2^2+1) \cdot ... \cdot (a_{10}^2+1) > |\,(a_1^2-1)(a_2^2-1) \cdot ... \cdot (a_{10}^2-1)\,|,$$

ceea ce contrazice relaţia (1).

MEDII

GRELE