PUNCTUL LUI TORRICELLI. APLICAŢII ÎN ALGEBRĂ

de CAMELIA OPREA, elevă, SIBIU

În practică se pune adesea problema amplasării unui obiectiv la distanţă minimă faţă de trei repere date, pentru a minimiza costurile de transport, conducte, cabluri, etc. De exemplu, se caută poziţia optimă, de amplasare a unei uzine termoelectrice ce urmează a deservi 3 localităţi A, B, C nesituate în linie dreaptă, astfel încât lungimea conductelor care leagă uzina de cele 3 localităţi să fie minimă.

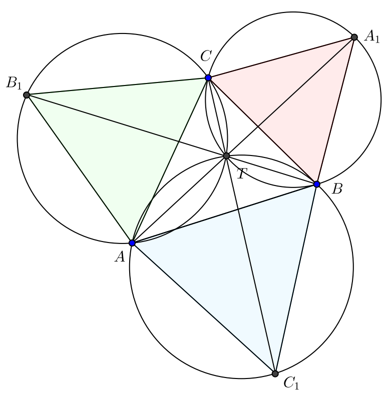
Matematicianul francez Pierre de Fermat (1601-1665) este cel care a formulat problema determinării **punctului aflat la distanţă minimă de vârfurile unui triunghi**, într-o scrisoare adresată confratelui său italian Evangelista Torricelli (1608-1647). Din corespondenţa celor doi au rămas posterităţii următoarele teoreme:

Teorema 1. (Torricelli)

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile strict mai mici decât $120°$ şi pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1, ACB_1, BCA_1. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.

Demonstraţie:

Fie T punctul de intersecţie al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 şi ACB_1. Atunci patrulaterele $ATBC_1$ şi $ATCB_1$ sunt inscriptibile, deci $m(\sphericalangle ATB) = 180° - m(\sphericalangle AC_1B) = 180° - 60° = 120°$ şi $m(\sphericalangle ATC) = 180° - m(\sphericalangle AB_1C) = 180° - 60° = 120°$, de unde $m(\sphericalangle BTC) = 360° - m(\sphericalangle ATB) - m(\sphericalangle ATC) = 120°$, deci $m(\sphericalangle BTC) + m(\sphericalangle BA_1C) = 120° + 60° = 180°$, adică patrulaterul $BTCA_1$ este inscriptibil, punctul T aflându-se pe cercul circumscris triunghiului BCA_1, q.e.d.



Observaţie: Astfel s-a demonstrat că există un unic punct din plan cu proprietatea că $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°$.

Punctul T se numeşte **punctul lui Torricelli** pentru $\triangle ABC$. El coincide, după cum se va demonstra, cu punctul lui Fermat, care realizează minimul sumei distanţelor la vârfurile unui triunghi.

Teorema 2.

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile strict mai mici decât $120°$ şi triunghiurile echilaterale $ABC_1,\ ACB_1,\ BCA_1$ construite în exterior. Fie T punctul definit mai sus. Atunci:

a) $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ sunt concurente.

b) $AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Demonstraţie:

a) T fiind punctul de concurenţă a cercurilor din teorema precedentă, în patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ avem $m(\sphericalangle A_1TC) = m(\sphericalangle A_1BC) = 60° \Rightarrow$
$m(\sphericalangle A_1TA) = m(\sphericalangle A_1TC) + m(\sphericalangle CTA) = 60° + 120° = 180° \Rightarrow T \in AA_1$.
Analog rezultă $T \in BB_1,\ T \in CC_1 \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{T\}$ q.e.d.

b) Aplicând prima teoremă a lui Ptolomeu pentru patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ şi ţinând cont că $\triangle BCA_1$ este echilateral $\Rightarrow BC \cdot TA_1 = BT \cdot A_1C + A_1B \cdot CT \Rightarrow TA_1 = BT + CT \Rightarrow AA_1 = AT + TA_1 = AT + BT + CT$. Procedând analog în patrulaterele inscriptibile $ATBC_1$ şi $ATCB_1 \Rightarrow AT+BT+CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$ q.e.d.

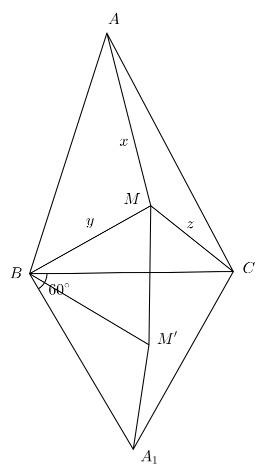
Teorema 3. (Fermat)

Punctul T considerat anterior are proprietatea că realizează minimul sumei $MA + MB + MC$, cu M punct din planul triunghiului ABC.

Demonstraţie:

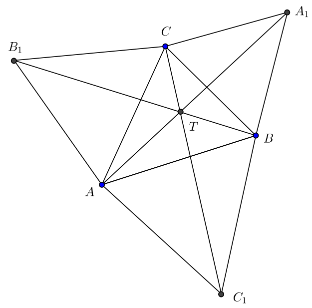
Fie M un punct oarecare în planul triunghiului ABC. Aplicând inegalitatea lui Ptolomeu în patrulaterul MBA_1C obţinem: $MA_1 \cdot BC \leqslant MB \cdot A_1C + MC \cdot A_1B$ şi ţinând cont că $\triangle BCA_1$ este echilateral, simplificăm şi obţinem $MA_1 \leqslant MB+MC$, adică $AA_1 \leqslant AM + MA_1 \leqslant MA + MB + MC$, pentru orice $M \in (ABC)$. Folosind Teorema 2, rezultă că: $TA + TB + TC = AA_1 \leqslant MA + MB + MC$ cu egalitate, dacă şi numai dacă $M = T$, q.e.d.

Să ne imaginăm **o construcţie geometrică** a acestui punct.



Fie $\triangle ABC$ cu toate unghiurile mai mici decât $120°$ şi M un punct oarecare din interiorul său. A-l determina pe T este echivalent cu a găsi punctul pentru care suma $MA + MB + MC$ este minimă. Rotim $\triangle BCM$ în jurul punctului B cu $60°$, spre exteriorul triunghiului ABC. Astfel punctul C ajunge în poziţia A_1, iar M în M'. Prin construcţie, triunghiurile BCA_1 şi BMM' sunt echilaterale, iar $\triangle BCM \equiv \triangle BA_1M'$. Ca urmare suma distanţelor $MA + MB + MC = AM + MM' + M'A_1$ este în o general linie frântă (între punctele A şi A_1 frântă în punctele M şi M'), care are lungimea minimă dacă şi numai dacă punctele A, M, M', A_1 sunt coliniare, ceea ce este echivalent cu $m(\sphericalangle AMB) = 180° - m(\sphericalangle BMM') = 180° - 60° = 120°$ şi $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BM'A_1) = 180° - m(\sphericalangle BM'M) = 180° - 60° = 120°$ $\Leftrightarrow T = M$. În concluzie punctul $T \in AA_1$.

Rotind analog $\triangle CAM$ în jurul lui C şi $\triangle ABM$ în jurul lui A, obţinem punctele B_1 şi C_1 aflate în exteriorul $\triangle ABC$, astfel încât triunghiurile CAB_1 şi ABC_1 să fie echilaterale. Rezultă analog a T se află şi pe BB_1 şi pe CC_1. Ca urmare $AA_1,\ BB_1$ şi CC_1 sunt concurente, punctul T fiind chiar intersecţia lor şi deci este unic.



În concluzie, prin construcţia geometrică s-a demonstrat că
$MA+MB+MC \geqslant TA+TB+TC = AA_1 = BB_1 = CC_1,\ \forall M \in Int\,\triangle ABC$, $\{T\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1,\ m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°$, ceea ce este echivalent cu teoremele 1, 2, 3 (pentru M interior triunghiului).

Aplicaţii. Prezentăm câteva aplicaţii în algebră şi mai cu seamă în demonstrarea unor inegalităţi.

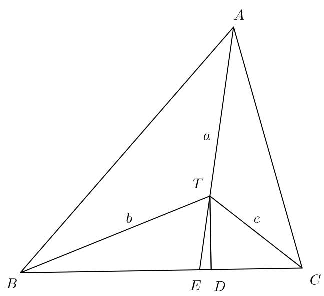
P.1. Numerele $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ verifică următoarele relaţii:
a) $x^2+xy+y^2=25$, **b)** $y^2+yz+z^2=169$, **c)** $z^2+zx+x^2=144$.
Să se calculeze valoarea expresiei $xy+yz+zx$.
Soluţie:
O soluţie algebrică pentru astfel de probleme necesită eforturi mari, nu întotdeauna încununate de succes.
Observăm, având în vedere teorema cosinusului, următoarele:
-condiţia **a)** este echivalentă cu existenţa unui triunghi cu laturile $x, y, 5$ şi unghiul dintre x şi y de $120°$;
-condiţia **b)** este echivalentă cu existenţa unui triunghi cu laturile $y, z, 13$ şi unghiul dintre y şi z de $120°$;
-conditîa **c)** este echivalentă cu existenţa unui triunghi cu laturile $z, x, 12$ şi unghiul dintre z şi x de $120°$.
Trasăm cele trei triunghiuri având un vârf comun T, din care pornesc laturile x, y, z formând între ele unghiuri de $120°$. Obţinem astfel un triunghi cu laturile 5, 13, 12 şi deci dreptunghic (se verifică teorema lui Pitagora $5^2+12^2=13^2$), în care T este punctul lui Torricelli, deoarece îndeplineşte condiţia $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°$. Calculăm aria: $S_{ABC} = S_{TAB}+S_{TBC}+S_{TAC} = \frac{1}{2}(xy\sin 120° + yz\sin 120° + zx\sin 120°) = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$. Pe de altă parte, $\triangle ABC$ fiind dreptunghic, are $S_{ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30 \Rightarrow xy+yz+zx = 40\sqrt{3}$.

P.2. Pentru $a, b, c > 0$ demonstraţi că:

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leqslant \frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{ab}+\frac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{bc}+\frac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{ca}.$$

Marius Stănean, din [4]

Soluţie: În jurul punctului T construim $\triangle TAB$, $\triangle TAC$, $\triangle TBC$, astfel încât $TA = a$, $TB = b$, $TC = c$ şi $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°$. Punctul T este punctul lui Torricelli pentru $\triangle ABC$ astfel obţinut. Considerăm $TD \perp BC$, $D \in BC$ şi $(TE$ bisectoarea unghiului BTC, $E \in BC$. Aplicând teorema cosinusului şi exprimând aria $\triangle BTC$ în două moduri, se obţine:



$BC = \sqrt{b^2 + bc + c^2}$, $S_{BTC} = \dfrac{bc \sin 120°}{2} = \dfrac{BC \cdot TD}{2}$, de unde $TD = \dfrac{bc \sin 120°}{BC} = \dfrac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 + bc + c^2}}$. Calculăm lungimea bisectoarei TE în $\triangle BTC$, care are laturile $\sqrt{b^2 + bc + c^2} = a'$, b, c :

$$TE = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a')} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\frac{b+c+\sqrt{b^2+bc+c^2}}{2} \cdot \frac{b+c-\sqrt{b^2+bc+c^2}}{2}} =$$

$\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \dfrac{\sqrt{(b+c)^2 - (b^2+bc+c^2)}}{2} = \dfrac{\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{bc} = \dfrac{bc}{b+c}$. Dar $TD \leqslant TE$ implică $\dfrac{1}{TD} \geqslant \dfrac{1}{TE} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt{b^2+bc+c^2}}{bc\sqrt{3}} \geqslant \dfrac{b+c}{bc} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{bc} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$. Analog: $\dfrac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{ca} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right)$, $\dfrac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{ab} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ şi însumându-le încheiem demonstraţia. Egalitatea are loc dacă bisectoarea TE este şi înălţime, adică dacă $b = c$ şi analog celelalte, deci pentru $a = b = c$.

P.3. Oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z să se arate că:

$$3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2) \geqslant (x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2.$$

Olimpiadă Iran

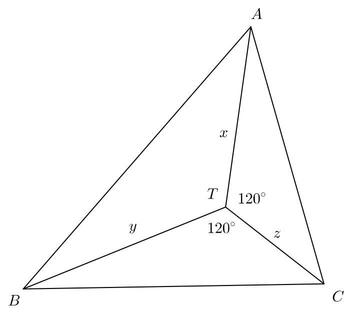
Soluţie: $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ fiind variabile pozitive, pot fi considerate ca distanţe.

Expresiile de forma $x^2 + xy + y^2$ ne sugerează deja utilizarea punctului lui Torricelli.

Fie un punct T în jurul căruia trasăm segmentele TA, TB, TC de lungimi x, y, respectiv z, astfel încât $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = m(\sphericalangle BTC) = 120°$. Din construcţie rezultă că T este chiar punctul lui Torricelli pentru $\triangle ABC$, care are laturile $c = \sqrt{x^2+xy+y^2}$, $a = \sqrt{y^2+yz+z^2}$, $b = \sqrt{z^2+zx+x^2}$. Calculez aria: $S = A_{\triangle ABC} = A_{\triangle TAB} + A_{\triangle TBC} + A_{\triangle TAC} = \sum\limits_{cyc} \dfrac{xy \sin 120°}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$. Inegalitatea devine:

$$3a^2b^2c^2 \geqslant (x+y+z)^2\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow abc\sqrt{3} \geqslant (x+y+z)\frac{4S}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x+y+z \leqslant 3\cdot\frac{abc}{4S} = 3R,$$

R fiind raza cercului circumscris. Dar conform teoremei lui Fermat, punctul T realizează minimul sumei distanţelor $MA+MB+MC$ pentru $\forall M \in (ABC)$. Pentru $M = O$, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului, rezultă $x+y+z = TA+TB+TC \leqslant OA+OB+OC = 3R$ ceea ce încheie demonstraţia.
Egalitatea are loc dacă $T = O$, adică dacă triunghiul este echilateral, ceea ce revine la $x = y = z$.



P.4. Să se arate că oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z avem:
$3(x+y+z) \leqslant \sqrt{(x+y+z)^2+3(x^2-yz)} + \sqrt{(x+y+z)^2+3(y^2-zx)} + \sqrt{(x+y+z)^2+3(z^2-xy)}$.

Soluţie: x, y, z fiind numere reale pozitive pot fi considerate lungimi de segmente. Inecuaţia fiind omogenă şi fiindcă trebuie demonstrat că suma $x+y+z$ este mai mică sau cel mult egală cu o expresie ce ar putea fi o sumă de segmente, mă gândesc la punctul lui Torricelli. Consider suma $x+y+z$ egală cu suma distanţelor de la T la vârfurile triunghiului $\triangle ABC$ căruia îi este asociat. Încerc să pun în evidenţă în membrul drept laturile triunghiului:

$\sqrt{(x+y+z)^2+3(x^2-yz)} = \sqrt{4x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-yz} =$
$\sqrt{2x^2+2xy+2y^2+2x^2+2xz+2z^2-y^2-yz-z^2} =$
$= \sqrt{2[(x^2+xy+y^2)+(x^2+xz+z^2)]-(y^2+yz+z^2)} = \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} =$
$= 2\sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}} = 2m_a.$

Inecuaţia devine: $3(x+y+z) \leqslant 2(m_a+m_b+m_c) \Leftrightarrow x+y+z \leqslant \dfrac{2}{3}(m_a+m_b+m_c) \Leftrightarrow$
$x+y+z \leqslant \dfrac{2}{3}m_a + \dfrac{2}{3}m_b + \dfrac{2}{3}m_c.$

Dar două treimi din mediană reprezintă distanţa de la vârf la centrul de greutate G al triunghiului. Inecuaţia devine $TA+TB+TC \leqslant GA+GB+GC$ ceea ce este întotdeauna adevărat, conform teoremei lui Fermat.
Egalitatea are loc dacă $T = G$, adică dacă triunghiul este echilateral, ceea ce revine la $x = y = z$.

Observaţie: Problemele **P.2.** şi **P.4.** pot fi rezolvate algebric fără dificultate, ceea ce nu am putea spune şi despre **P.1.** şi **P.3.**.

BIBLIOGRAFIE

[1] **L. Nicolescu, V. Boskoff** – *Probleme practice de geometrie,* Editura Tehnică, 1990

[2] **Gh. Manea, G. Manea** – *Aplicaţii ale matematicii în practică,* Editura Fair Partners, 2007

[3] **D. Popescu** – *Asupra unor puncte de concurenţă ale unui triunghi,* Revista Recreaţii Matematice, Nr.2/2010

[4] **M. O. Drimbe** – *Inegalităţi, idei şi metode,* Editura GIL, 2003, pag. 65.