DOUĂ PROBLEME ÎNRUDITE

Problema 1. Cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2, R_2)$, $R_1 > R_2$, sunt tangente interior în punctul A. O dreaptă d, taie cercul $\mathscr{C}_1$ în punctele B, C şi este tangentă cercului $\mathscr{C}_2$ în punctul D. Atunci $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

Problema 2. Cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, R_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2, R_2)$, $R_1 > R_2$, sunt tangente interior în punctul A. O dreaptă d taie cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ în punctele B, C, respectiv D_1, D_2. Atunci $(AD_1$ şi $(AD_2$ sunt izogonale în triunghiul ABC.

Problema 1 se poate demonstra cu o omotetie. Problema 2 se poate demonstra uşor cu unghiuri: dacă t este tangenta comună celor două cercuri (în A), $D_1 \in (BD_2)$ şi $X \in t$ este în acelaşi semplan determinat de AD_1 ca şi B, atunci $m(\sphericalangle BAD_1) = m(\sphericalangle XAD_1) - m(\sphericalangle XAB) = m(\sphericalangle XD_2D_1) - m(\sphericalangle XAB) = m(\sphericalangle D_2AC)$.

Deşi problema 2 pare să fie un caz particular al problemei 1 (anume acela în care $D_1 = D_2$), demonstraţia de mai sus nu funţionează. Se poate obţine însă problema 2 din problema 1 prin trecere la limită.
Reciproc, se poate obţine problema 1 din problema 2 ducând o tangentă la $\mathscr{C}_2$ paralelă cu d. Notând cu D punctul de tangenţă, avem din problema 1 că $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Dar şi unghiurile $\sphericalangle DAD_1$ şi $|vaaDAD_2$ sunt congruente, de unde concluzia.