ÎN LEGĂTURĂ CU TEOREMA BISECTOAREI GLISANTE

de ANDREI ECKSTEIN, TIMIŞOARA

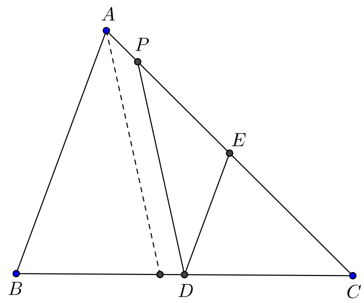
În aceast articol ne propunem să reunim diverse proprietăţi cunoscute, legate de teorema bisectoarei glisante şi de bogatul ei univers. Configuraţia este legată de mai multe probleme date în acest an la diverse concursuri de matematică.

1. Drepte separatoare. Centrul lui Spieker

Vom începe cu următoarea proprietate interesantă:

Teorema 1. Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a unui triunghi ABC. Considerăm dreapta d care trece prin D şi împarte perimetrul triunghiului în două părţi egale. Atunci dreapta d este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ (sau coincide cu aceasta).

Demonstraţie: Dacă $AB = AC$, evident d coincide cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.
În caz contrar, putem presupune $AB < AC$. Dacă P este al doilea punct de intersecţie a dreptei d cu triunghiul, atunci $P \in (AC)$ este astfel ca $AB + AP = CP$. Considerând E mijlocul lui $[AC]$, triunghiul CDE are perimetrul jumătate din perimetrul triunghiului ABC, deci $CD + DE + EC = DC + CP$, de unde $DE = EP$.



Rezultă că $m(\sphericalangle EPD) = \dfrac{1}{2}m(\sphericalangle CED) = \dfrac{1}{2}m(\sphericalangle A)$, deci DP este paralelă cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$. ■

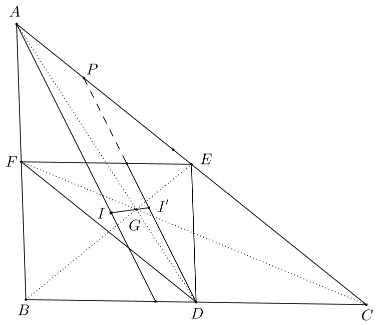
Evident, are loc şi reciproca teoremei 1: paralela la bisectoare dusă prin mijlocul laturii opuse împarte perimetrul triunghiului în două părţi egale.

O dreaptă d care trece prin mijlocul uneia din laturile triunghiului şi împarte perimetrul acestuia în două părţi egale se numeşte *separatoare* (în limba engleză *cleaver*, adică ,,satâr").

Teorema 2. Cele trei drepte separatoare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct numit centrul lui *Spieker*.[1]

[1]în onoarea matematicianului germen Theodor Spieker (1823 – 1913).

Demonstraţie: Dacă D, E, F sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale unui triunghi ABC, omotetia de centru G (centrul de greutate) şi raport $-\dfrac{1}{2}$ care duce triunghiul ABC în triunghiul său median, duce bisectoarea din A în paralela prin D la bisectoarea din A, adică în dreapta separatoare care trece prin D. (Aceasta este chiar bisectoarea din D a triunghiului median DEF.) Deoarece bisectoarele triunghiului ABC sunt concurente în I, centrul cercului înscris, şi imaginile lor prin omotetie, adică cele trei separatoare, vor fi concurente în I', imaginea prin omotetie a punctului I. De fapt, I', centrul lui Spieker, este centrul cercului înscris în triunghiul DEF. ■



Demonstraţia de mai sus poate fi ,,tradusă" la nivelul clasei a VII-a folosind asemănarea triunghiurilor AGI şi DGI'.

O consecinţă imediată este atunci că punctele I, G, I' sunt coliniare, cu $G \in (II')$ şi $IG = 2GI'$, adică centrul lui Spieker se află pe *dreapta lui Nagel.* O parte din acest rezultat a fost dată anul acesta la concursul interjudeţean *Mathematica - modus vivendi*, Râmnicu-Vâlcea, vezi problema **O.IX.291.** din RMT nr. 2/2014, rezolvată în acest număr.

Independent de această concurenţă, merită reţinut că separatoarele sunt de fapt bisectoarele triunghiului median.

2. Teorema ,,bisectoarei glisante"

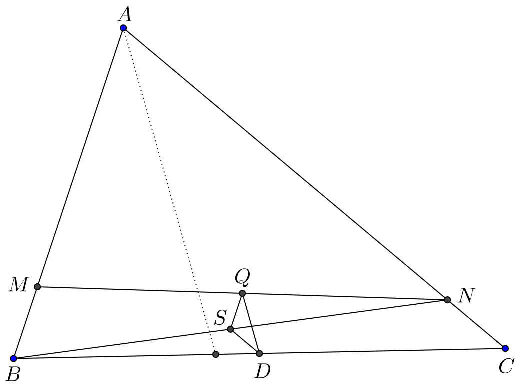
Teorema bisectoarei glisante este o generalizare a reciprocei teoremei 1:

Teorema 3. (a ,,bisectoarei glisante") Se consideră un triunghi ABC şi $M \in AB$, $N \in AC$, de aceeaşi parte a dreptei BC, astfel încât $BM = CN$. Fie D, Q mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[MN]$. Atunci dreapta DQ este paralelă (sau coincide cu) bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

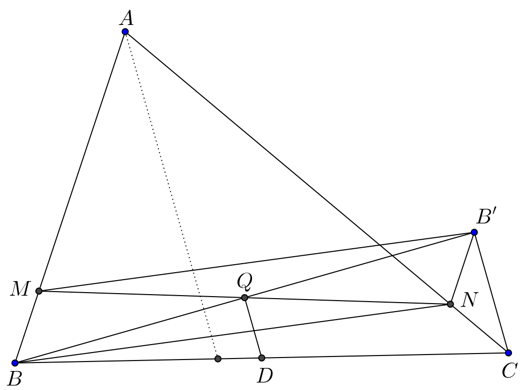
Demonstraţia 1: (cu vectori)

Se ştie (şi se demonstrează uşor) că $\overrightarrow{QD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}\right)$. Reprezentând vectorii $\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{NC}$ cu originea în A, adică alegând X, Y astfel încât $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{NC}$, rezultă că $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{AZ}$, unde Z este mijlocul lui $[XY]$. Dar triunghiul AXY este isoscel ($AX = MB = NC = AY$), deci mediana (AZ) este şi bisectoare; prin urmare vectorul $\overrightarrow{QD}$ este coliniar cu vectorul $\overrightarrow{AZ}$ care are direcţia bisectoarei unghiului $\sphericalangle A$. ■

Demonstraţia 2: Vom considera cazul $M \in (BA$, $N \in (CA$. Fie S mijlocul lui $[BN]$. Atunci $[QS]$ este linie mijlocie în triunghiul MNB, iar $[SD]$ este linie mijlocie în triunghiul BCN. Atunci $QS = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}NC = SD$, iar $m(\sphericalangle QSD) = m(\sphericalangle QSN) + m(\sphericalangle NSD) = m(\sphericalangle ABN) + m(\sphericalangle ANB) = 180° - m(\sphericalangle A)$. Rezultă că triunghiul QSD este isoscel cu $m(\sphericalangle SQD) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$ şi, cum $QS \parallel AB$, rezultă concluzia.
Cazul celălalt, cu M, N în semiplanul opus lui A determinat de BC, se poate demonstra analog sau se poate reduce la cazul studiat mai sus, aplicându-l pentru triunghiul AMN. ■



Demonstraţia 3: Fie B' simetricul lui B faţă de Q. Atunci $MBNB'$ este paralelogram, deci $NB' = MB = NC$. Un calcul simplu arată că $m(\sphericalangle NB'C) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle A)$, deci $B'C$ e paralelă cu bisectoarea din A. Dar $[QD]$ este linie mijlocie în triunghiul BCB', deci QD, fiind paralelă cu $B'C$, este paralelă (sau confundată) cu bisectoarea din A. ■



Teorema bisectoarei glisante arată că dreapta QD este de fapt separatoarea definită în primul paragraf.
Presupunând $AB < AC$ şi alegând $M = A$, punctul Q va fi chiar punctul P - a doua intersecţie a separatoarei din D cu triunghiul ABC.

În mod asemănător se demonstrează şi următoarea generalizare a teoremei bisectoarei glisante:

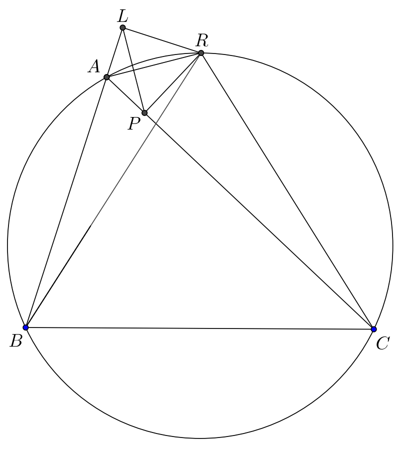
Propoziţie: Fie $k > 0$ un număr real. Se consideră un triunghi ABC şi $M \in AB$, $N \in AC$, de aceeaşi parte a dreptei BC, astfel încât $\dfrac{BM}{CN} = k$. Fie D, Q puncte pe segmentele $[BC]$, respectiv $[MN]$ astfel încât $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{MQ}{NQ} = k$. Atunci dreapta DQ este paralelă (sau coincide cu) bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

3. Problema ,,coardei frânte" a lui Arhimede

Vă prezentăm în continuare o problemă celebră, atribuită lui Arhimede, care, după cum se va vedea, este legată de teorema bisectoarei glisante.

Teoremă 4. (a ,,coardei frânte") Fie R mijlocul arcului BAC al cercului circumscris triunghiului ABC, cu $AB < AC$. Dacă P este proiecţia lui R pe AC, atunci P împarte ,,coarda frântă" BAC în două părţi egale (adică $AB+AP = PC$).

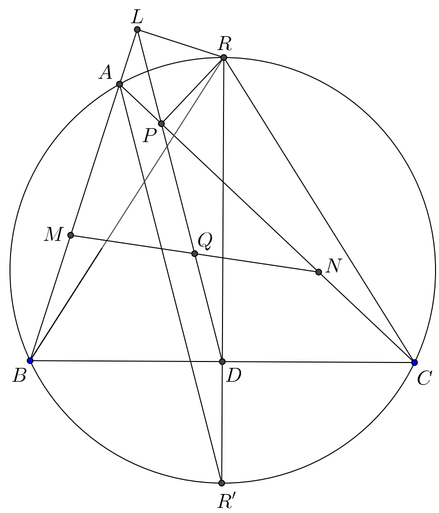
Demonstraţie: Fie L proiecţia lui R pe AB. Din $RB = RC$ şi $\sphericalangle RBL \equiv \sphericalangle RCP$, rezultă că triunghiurile RLB şi RPC sunt congruente (IU), deci $BL = CP$ şi $RL = RP$. Apoi $\Delta\, RLA \equiv \Delta\, RPA$ (IC), deci $AL = AP$. În concluzie, $CP = BL = BA + AL = BA + AP$. ■



Alte demonstraţii pot fi găsite în [1].

4. Proprietăţi diverse

În figura de mai jos apar majoritatea punctelor de care ne-am interesat până acum: M, N puncte pe laturile (AB), respectiv (AC) ale triunghiului ABC, cu $AB < AC$, D, Q mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[MN]$, R mijlocul arcului BC care îl conţine pe A, R' mijlocul celuilalt arc BC, P proiecţia lui R pe ,,coarda frântă" BAC (în speţă pe AC) şi care, am văzut, este al doilea punct de intersecţie al separatoarei din D cu triunghiul, L proiecţia lui R pe AB.



Să observăm că DP este separatoarea din D şi că punctele L, P, D sunt coliniare: separatoarea din D este chiar *dreapta lui Simson* corespunzătoare punctului R şi triunghiului ABC. Alte proprietăţi interesante ale configuraţiei sunt descrise în

Teorema 5.
În condiţiile de mai sus, au loc următoarele proprietăţi:
a) $RM = RN$;
b) patrulaterul $RAMN$ este inscriptibil;
c) dacă notăm $MN \cap BC = \{K\}$, atunci şi patrulaterele $KBMR$, $KCNR$ sunt inscriptibile, adică R este *punctul lui Miquel* al patrulaterului $MNCB$.

Demonstraţie: a) Cum $RB = RC$, $BM = CN$ şi $\sphericalangle MBR \equiv \sphericalangle NCR$, rezultă congurenţa triunghiurilor MBR şi NCR, de unde concluzia.
b) Din congruenţa de triunghiuri demonstrată mai sus rezultă că $m(\sphericalangle MRN) = m(\sphericalangle MRB) + m(\sphericalangle BRC) - m(\sphericalangle NRC) = m(\sphericalangle BRC) = m(\sphericalangle A)$, de unde rezultă că $RAMN$ este inscriptibil.
c) Din $\sphericalangle MRN \equiv \sphericalangle BRC$ rezultă $\sphericalangle RBK \equiv \sphericalangle RMK$ (deci $KBMR$ este inscriptibil) şi $\sphericalangle RCK \equiv \sphericalangle RNK$ (deci $KCNR$ este inscriptibil). ■

5. Probleme propuse

1. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor unui triunghi ABC şi A_2, B_2, C_2 punctele care împart liniile frânte CAB, ABC, BCA în părţi egale. Arătaţi că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

Concursul Vrânceanu-Procopiu, 2010

2. Fie H, A_1, B_1, C_1 ortocentrul, respectiv mijloacele laturilor triunghiului ABC şi A_2, B_2, C_2 punctele care împart liniile frânte BHC, CHA, AHB în părţi egale. Arătaţi că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.

Marius Stănean

3. Fie patrulaterul convex $ABCD, \sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ şi punctele $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CD)$, $S \in (DA)$ astfel încât $AP = CQ$, $AS = CR$. Să se arate că mijloacele segmentelor $(AC), (PQ), (RS)$ sunt coliniare.

A. V. Mihai, O:410 - GM 7/1984

4. În triunghiul ABC cu $|AB| \neq |AC|$ notăm cu X, Y şi Z punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$; iar cu U mijlocul arcului BC al cercului circumscris triunghiului ABC, care conţine vârful A al triunghiului ABC. Fie K cel de-al doilea punct de intersecţie al dreptei UX cu cercul circumscris triunghiului ABC şi $\{T\} = AK \cap YZ$. Arătaţi că $XT \perp YZ$.

Olimpiada Rio Plata (Argentina), 2008

5. Se consideră triunghiul ABC, $AB = AC$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $CN = AM$. Dacă P este mijlocul segmentului $[CM]$ şi Q este mijlocul segmentului $[AN]$, arătaţi că $PQ \perp BC$.

Concursul Şcolii Gimnaziale nr. 56, Bucureşti, 2014

6. Fie ABC un triunghi cu $AB > BC$ şi Ω cercul său circumscris. Fie M, N pe laturile $[AB]$, respectiv $[BC]$, astfel încât $AM = CN$. Dacă $\{K\} = MN \cap AC$, P este centrul cerculu înscris în triunghiul AMK, Q este centrul cercului K-exînscris al triunghiului CNK (opus vârfului Kşi tangentlui CN). Dacă R este mijlocul arcului ABC al lui Ω, arătaţi că $RP = RQ$.

M. Kungodjin, All Russian Olympiad, 2014

7. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se iau punctele variabile M şi N astfel ca $BM = CN$. Să se determine locurile geometrice ale mijlocului P al segmentului MN dacă:
a) M şi N sunt de aceeaşi parte a lui BC.
b) M şi N sunt în semiplane opuse faţă de BC.

Vasile Pop, Concursul liceelor partenere cu Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2010

În încheiere, doresc să le mulţumesc unora dintre cei care mi-au atras atenţia asupra câtorva din faptele sau problemele prezentate mai sus: Mircea Fianu, Titu Zvonaru şi Ioan-Laurenţiu Ploscaru.

BIBLIOGRAFIE

[1] **A. Eckstein** – *Cum exploatăm un anumit tip de ipoteze (Despre ,,lipiri" şi ,,spargeri")*, RMT nr. 3/2009, pag. 3-6

[2] http://forum.gil.ro/