CÂTEVA PROBLEME PENTRU STUDIU INDIVIDUAL

1. Un punct D este situat pe latura (BC) a triunghiului ABC. Se consideră cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi ACD. Tangenta comună exterioară (diferită de BC) intersectează AD în punctul K. Demonstraţi că lungimea segmentului AK nu depinde de poziţia punctului D.

I. Sharygin (Turneul Oraşelor, 1994)

2. Fie ABC un triunghi în care există punctele D, E, F pe laturile (BC), (AC), respectiv (AB) astfel încât $FB = FD$ şi $EC = ED$. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cercul de centru E şi rază ED intersectează a doua oară cercul de centru F şi rază FD în G. Arătaţi că punctele A, E, F, G şi O sunt conciclice.

3. Fie B_1, B_2, B_3 puncte pe dreapta d şi A un punct nesituat pe dreapta d. Dacă O_1, O_2, O_3 sunt centrele cercurilor $\mathscr{C}_1, C_2, C_3$ circumscrise triunghiurilor AB_2B_3, AB_1B_3, AB_1B_2, iar H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor $B_1O_2O_3$, $B_2O_1O_3$ $B_3O_1O_2$, atunci punctele $A, O_1, O_2, O_3, H_1, H_2, H_3$ se află pe un cerc $\mathscr{C}$. În plus, $O_iH_i \parallel BC$. Mai mult, dacă $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ dreptele B_iO_j, B_jO_i şi cercul $\mathscr{C}_k$ au un punct comun situat şi el pe cercul $\mathscr{C}$.

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătaţi că cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ACD sunt tangente dacă şi numai dacă cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi BCD sunt tangente.

5. Se consideră un cerc $\mathcal{C}$ şi un punct A exterior acestuia. Din A se duc tangentele AB şi AC la cercul $\mathcal{C}$. Paralela prin B la AC intersectează $\mathcal{C}$ în D, iar dreapta AD intersectează $\mathcal{C}$ în punctul E. Demonstraţi că dreapta BE conţine mijlocul segmentului (AC).

din *Culegere de probleme de geometrie*, autori *I.C. Drăghicescu, V. Masgras*[1]

6. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Fie M intersecţia dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor B şi C, iar N intersecţia dintre bisectoarele interioare ale unghiurilor A şi D. Arătaţi că dreptele AB, CD şi MN sunt concurente.

7. Fie triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 36°$. În interiorul triunghiului ABC se consideră punctul M astfel încât $m(\sphericalangle MBC) = 24°$ şi $m(\sphericalangle MCB) = 30°$. Determinaţi $m(\sphericalangle AMC)$.

Carmen si Viorel Botea, Brăila (Concursul Petru Moroşan Trident, 2013)

8. Aflaţi cel mai mic număr natural divizibil cu 17 care are suma cifrelor 17.

Concurs AIME, 2015

9. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ verifică $ab + bc + ca = 3$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9$.

10. Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale nenule cu proprietatea a^n divide b^{n+1} pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci a divide b.

11. În fiecare pătrăţel al unei table de şah 3×3 se trece câte o cifră. Un cal este mutat de-a lungul unui drum în formă de L constituit din patru pătrăţele: 3 într-o direcţie, apoi unul în direcţie perpendiculară. În câte moduri se poate completa tabla de şah cu numere de o cifră, nu neapărat distincte, astfel încât suma celor patru numere acoperite de orice asemenea mutare de cal să fie aceeaşi?

[1] Editura Tehnică, 1987