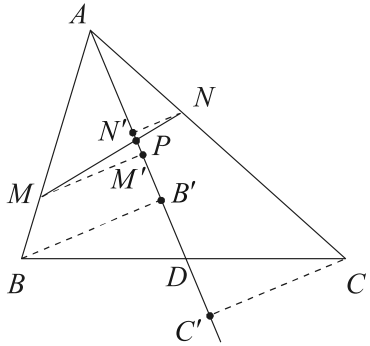
Rapoarte determinate de o ceviană şi o secantă într-un triunghi

Titu ZVONARU[1], _Bogdan IONIŢĂ_[2]

În triunghiul ABC considerăm ceviana AD, cu $D \in (BC)$. Dacă o secantă intersectează laturile AB, AC şi ceviana AD în punctele M, N, respectiv P, atunci sunt adevărate următoarele două relaţii:

$$\frac{AM}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{PN}{PM} = 1 \quad (R_1), \qquad \frac{AP}{PD} = \frac{BC \cdot \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{AN}{NC}}{BD \cdot \dfrac{AM}{MB} + DC \cdot \dfrac{AN}{NC}} \quad (R_2).$$

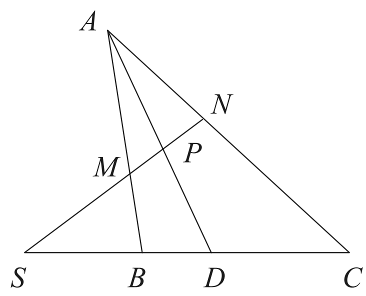
Demonstraţie. (1) Fie M', N', B', C' proiecţiile punctelor M, N, B, respectiv C pe dreapta AD. Folosind triunghiuri dreptunghice asemenea, avem:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{MM'}{BB'}; \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'};$$
$$\frac{AC}{AN} = \frac{CC'}{NN'}; \quad \frac{PN}{PM} = \frac{NN'}{MM'},$$

de unde, prin înmulţire, obţinem relaţia (R_1).

(2) Notăm $\dfrac{AM}{MB} = x$, $\dfrac{AN}{NC} = y$. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$ şi relaţia (R_2) este adevărată.



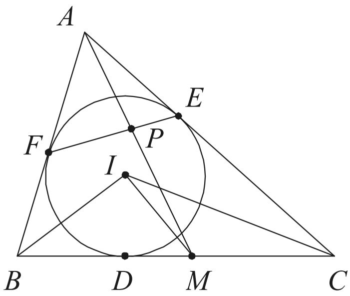
Dacă $x \neq y$, fie $\{S\} = MN \cap BC$; presupunem că punctul B este situat între S şi C. Cu teorema lui Menelaus aplicată la $\triangle ABC$ şi transversala SMN obţinem $\dfrac{SB}{SC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{MA}{MB} = 1$, de unde rezultă $\dfrac{SB}{SB+a} = \dfrac{y}{x}$, adică $SB = \dfrac{ay}{x-y}$. Aplicând acum teorema lui Menelaus în $\triangle ABD$ cu transversala SMP avem $\dfrac{SB}{SD} \cdot \dfrac{PD}{PA} \cdot \dfrac{MA}{MB} = 1$, adică $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{SB}{SB+BD} \cdot x$ şi obţinem $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{BC \cdot xy}{BD \cdot x + DC \cdot y}$, care este tocmai (R_2).

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii ale relaţiilor (R_1) şi (R_2).

Problema 1. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sunt tangente cercului înscris de centru I în punctele D, E, respectiv F. Bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{BIC}$ intersectează latura BC în punctul M. Notăm $\{P\} = FE \cap AM$. Să se demonstreze că $(DP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{FDE}$.* (Propusă de **Spania** la *Olimpiada Mediteraneană de Matematică* în 1998.)

[1] Profesor, Comăneşti (Bacău)
[2] Profesor, Bucureşti

Soluţie. Cu notaţiile obişnuite într-un triunghi, avem $AE = AF = p - a$, $BD = BF = p - b$, $CD = CE = p - c$, $DF = 2(p-b)\sin\frac{B}{2}$, $DE = 2(p-c)\sin\frac{C}{2}$. Cu teorema bisectoarei şi teorema sinusurilor, în $\triangle BIC$ obţinem $\frac{BM}{MC} = \frac{BI}{CI} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$.



Aplicând relaţia (R_1), avem $\frac{AF}{AB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{PE}{PF} = 1$, de unde rezultă că

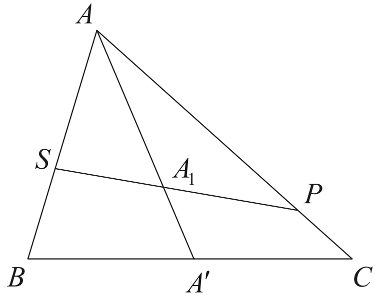
$$\frac{PE}{PF} = \frac{c}{p-a} \cdot \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \cdot \frac{p-a}{b} = \frac{c\sin\frac{B}{2}}{b\sin\frac{C}{2}} = \frac{c\sin\frac{C}{2}}{b\sin\frac{B}{2}} \cdot \frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{c\sin\frac{C}{2}}{b\sin\frac{B}{2}} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{ab}{(p-a)(p-b)} = \frac{(p-c)\sin\frac{C}{2}}{(p-b)\sin\frac{B}{2}} = \frac{DE}{DF}$$

şi, conform reciprocei teoremei bisectoarei, $(DP$ este bisectoarea unghiului FDE.

Problema 2. *Fie ABC un triunghi şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (AC)$, $R, S \in (AB)$ puncte astfel încât $BM = CN = CP = AQ = AR = BS = x$, unde $0 < 2x < \min\{AB, BC, CA\}$. Fie A_1, B_1, C_1 puncte aparţinând segmentelor (SP), (RN), (MQ) astfel încât AA_1, BB_1, CC_1 sunt ceviene de rang k în triunghiurile ASP, BRN, respectiv CQM. Demonstraţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.* (Generalizarea unei probleme propuse de **Constantin Cocea** în *RMT - 1/1996*, care se obţine pentru $k = 0$.)

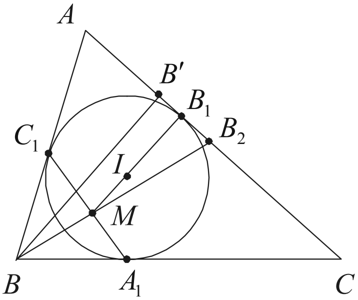
Soluţie. Notăm cu A' intersecţia dreptelor AA_1 şi BC. Avem $AS = c - x$, $AP = b - x$, $\frac{A_1S}{A_1P} = \left(\frac{c-x}{b-x}\right)^k$ şi cu relaţia (R_1) obţinem $\frac{AS}{AB} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{AC}{AP} \cdot \frac{A_1P}{A_1S} = 1$, de unde rezultă că $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}\left(\frac{b-x}{c-x}\right)^{k+1}$.



Consideraţii analoage relativ la punctele B' şi C'. Concluzia rezultă utilizând reciproca teoremei lui Ceva.

Problema 3. *Laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC sunt tangente cercului înscris de centru I în punctele C_1, A_1, respectiv B_1. Dacă B_2 este mijlocul laturii (AC), demonstraţi că dreptele B_1I, A_1C_1 şi BB_2 sunt concurente.* (*Olimpiadă*, **Republica Moldova**)

Soluţie. Fie B' proiecţia vârfului B pe latura AC. Notăm cu M punctul de intersecţie al medianei BB_2 cu B_1I. Deoarece $B_1I \perp AC$, rezultă că $MB_1 \parallel BB'$ şi obţinem $\dfrac{BM}{MB_2} = \dfrac{B'B_1}{B_1B_2}$. Dar $B'B_1 = p - a - c\cos A$, $B_1B_2 = \dfrac{b}{2} - (p-a)$, deci



$$\frac{BM}{MB_2} = \frac{p - a - c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{b}{2} - (p-a)} =$$

$$= \frac{b + c - a - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{b}}{b - (b+c-a)} = \frac{a^2 - c^2 - b(a-c)}{b(a-c)} = \frac{a-b+c}{b}.$$

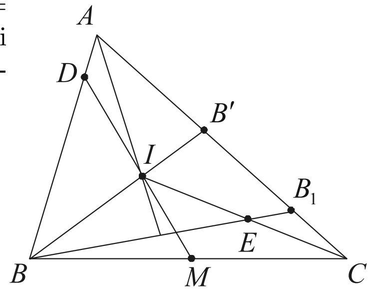
Dacă $A_1C_1 \cap BB_2 = \{M'\}$ cu relaţia (R_2) avem

$$\frac{BM'}{M'B_2} = \frac{b\cdot\dfrac{p-b}{p-c}\cdot\dfrac{p-b}{p-a}}{\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{p-b}{p-c} + \dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{p-b}{p-a}} = \frac{p-b}{(p-a)(p-c)}\cdot\frac{2(p-a)(p-c)}{p-a+p-c} = \frac{a-b+c}{b}$$

şi rezultă că $M \equiv M'$; dreptele A_1C_1, B_1I, BB_2 sunt concurente.

Problema 4. *Fie ABC un triunghi cu $AB < AC$, I centrul cercului înscris şi M mijlocul laturii BC. Notăm cu D intersecţia dintre IM şi AB, iar cu E intersecţia lui CI cu perpendiculara din B pe AI. Să se demonstreze că $DE \parallel AC$.* (*Problema 2915*, *Crux Mathematicorum - 2/2004*, propusă de **Toshio Seimiya**)

Soluţie. Notăm $\{B_1\} = BE \cap AC$, $\{B'\} = BI \cap AC$. În triunghiul ABB_1, bisectoarea AI este şi înălţime, deci $AB_1 = AB = c$, $B_1C = b - c$. Cu teorema bisectoarei în $\triangle BCB_1$ obţinem $\dfrac{BE}{EB_1} = \dfrac{a}{b-c}$.



Fie acum $\dfrac{BD}{DA} = x$. Cu relaţia (R_2) rezultă că

$$\frac{BI}{IB'} = \frac{AC\cdot\dfrac{BM}{MC}\cdot x}{CB'\cdot\dfrac{BM}{MC} + B'A\cdot x};$$

dar $\dfrac{BM}{MC} = 1$, $CB' = \dfrac{ab}{a+c}$, $B'A = \dfrac{bc}{a+c}$, $\dfrac{BI}{IB'} = \dfrac{a}{CB'}$, deci

$$\frac{a+c}{b} = \frac{bx}{\dfrac{ab}{a+c} + \dfrac{bc}{a+c}\cdot x} \Leftrightarrow 1 = \frac{bx}{a+cx} \Rightarrow x = \frac{a}{b-c}.$$

Deci $\dfrac{BE}{EB_1} = \dfrac{BD}{DA}$ şi rezultă că $DE \parallel AC$.

Observaţie. Alte soluţii pentru Problema 2 (cazul $k = 0$) şi Problema 3 pot fi găsite în [**1**].

Bibliografie

1. **G. Popa, P. Georgescu** - *O metodă de demonstrare a concurenţei unor drepte*, RecMat - 1/2004, 29–32.