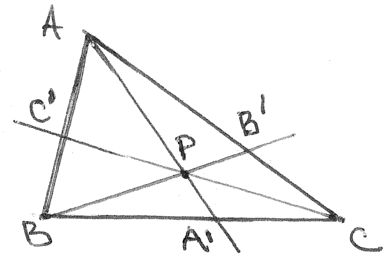
Probleme de concurență

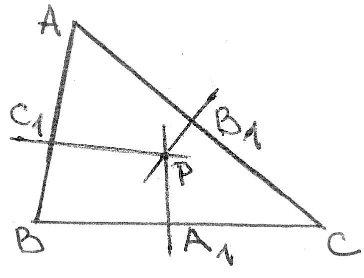
Date n curbe plane $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots, \mathscr{C}_n$, se spune că ele sunt concurente dacă au un punct comun. Vom avea în vedere cele mai simple curbe: dreptele și cercurile. Figurile la care acestea se vor raporta sunt și ele dintre cele mai simple: triunghiuri, patrulatere, poligoane cu mai multe laturi, cercuri sau configurații formate cu ele. Pentru abordarea unei probleme de concurență dispunem de puține rezultate teoretice care să se refere direct la acest subiect și de un număr de procedee, de moduri de rezolvare a unei astfel de probleme. Ca urmare, pentru rezolvarea problemelor de concurență este nevoie de un exercițiu asiduu, care să conducă în final la stăpânirea în bună măsură a acestei teme.

Amintim două rezultate teoretice:

Teorema lui Ceva și reciproca sa. Fie ABC un triunghi oarecare și AA', BB', CC' trei drepte, cu $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$, astfel încât două dintre ele se intersectează. Atunci, AA', BB', CC' sunt concurente dacă și numai dacă are loc relația

(1) $$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \quad \text{(relația lui Ceva).}$$





Teorema lui Carnot. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Perpendicularele ridicate în A_1, B_1, C_1 pe BC, CA și respectiv AB sunt concurente dacă și numai dacă are loc relația

(2) $$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2 .$$

Se numește *ceviană* o dreaptă ce trece prin vârful unui triunghi și intersectează dreapta suport a laturii opuse; punctul de intersecție se numește *piciorul cevienei*. Două ceviene ce trec prin același vârf se numesc *izogonale* dacă sunt simetrice față de bisectoarea unghiului triunghiului cu acel vârf. Două ceviene ce trec prin același vârf se numesc *izotomice* dacă picioarele lor sunt simetrice față de mijlocul laturii opuse.

Vom ilustra pe un număr de probleme atât utilizarea celor două rezultate teoretice de mai sus cât și cele mai des folosite procedee folosite pentru dovedirea unei concurențe.

1. Puncte izotomice, izogonale, cicloceviene

1.1. Izotomicele a trei ceviene concurente AA', BB' și CC' sunt de asemenea concurente.

1.2. Izogonalele a trei ceviene concurente AA', BB' și CC' sunt de asemenea concurente.

1.3. Fie ABC un triunghi oarecare și AA', BB', CC' trei ceviene concurente în P ($A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$). Cercul determinat de picioarele A', B', C' intersectează a doua oară dreptele BC, CA și AB în punctele A'', B'' și respectiv C''. Să se arate că cevienele AA'', BB'', CC'' sunt concurente.

2. Aplicarea directă a teoremei lui Ceva și reciprocii sale

2.1. Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului $\hat{A}$ și cu E și F picioarele bisectoarelor unghiurilor $\widehat{ADC}$ și respectiv $\widehat{ADB}$. Să se arate că dreptele AD, BE și CF sunt concurente.

2.2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Pe perpendicularele în B pe AB și în C pe AC se iau segmentele $[BB'] \equiv [AB]$ și respectiv $[CC'] \equiv [AC]$ (A, B', C' de aceeași parte a dreptei BC). Să se demonstreze concurența dreptelor BC', CB' cu înălțimea AA'.

2.3. Fie ABC un triunghi oarecare și D, E, F punctele de tangență a cercului înscris cu laturile BC, CA și respectiv AB. Să se arate că AD, BE și CF sunt concurente.

3. Reducerea la concurența medianelor, înălțimilor, bisectoarelor

3.1. Fie ABC un triunghi oarecare. Cercul construit pe BC ca diametru intersectează AC în E și AB în F. Perpendicularele din E și F pe BC intersectează a doua oară cercul în punctele E' și respectiv F'. Să se arate că BE', CF' și înălțimea AD sunt concurente.

3.2. Tangentele în A, B, C la cercul circumscris triunghiului ABC se intersectează în A', B', C'. Se notează cu A_1, B_1, C_1 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$. Să se demonstreze concurența dreptelor AA_1, BB_1 și CC_1.

3.3. Dreptele care unesc mijloacele laturilor unui triunghi cu mijloacele laturilor corespunzătoare ale triunghiului ortic sunt concurente.

4. Reducerea la o problemă de coliniaritate

4.1. Pe laturile paralele ale unui trapez se construiesc în exterior triunghiuri echilaterale. Să se arate că diagonalele trapezului și dreapta care unește vârfurile triunghiurilor diferite de ale trapezului sunt concurente.

4.2. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BCA', CAB' și ABC'. Să se arate că dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

4.3. Fie ABCD un trapez isoscel (AB∥CD). Bisectoarele unghiurilor $\widehat{DAC}$ și $\widehat{ABD}$ intersectează diagonalele BD și AC în E și respectiv F. Să se demonstreze că AD, BC și EF sunt concurente.

5. Coincidența punctelor de intersecție a câte două drepte

5.1. Fie ABCD un trapez oarecare, iar M și N mijloacele bazelor AB și respectiv CD. Considerăm $E \in (AD)$, E diferit de mijlocul lui AD. Paralela prin E la baze taie (BC) în F. Să se demonstreze că dreptele MF, NE și AC sunt concurente.

5.2. Fie ABCD un patrulater oarecare, O punctul de intersecție a diagonalelor și M, N, P, Q punctele în care bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ și $\widehat{DOA}$ taie laturile AB, BC, CD și respectiv DA. Să se arate că MN, PQ și AC sunt concurente.

6. Aplicarea teoremei lui Carnot

6.1. Perpendicularele pe laturile unui triunghi duse prin centrele cercurilor exînscrise sunt concurente.

6.2. Fie dat un triunghi echilateral de latură a și fie punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ și $P \in (AB)$ astfel încât $AP + BM + CN = \frac{3a}{2}$. Să se arate că perpendicularele în M pe BC, în N pe CA și în P pe AB sunt concurente.

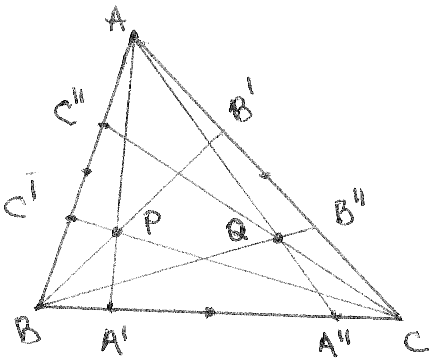
6.3. Un cerc intersectează laturile unui triunghi ABC în punctele $A_1, A_2 \in (BC)$, $B_1, B_2 \in (CA)$ și $C_1, C_2 \in (AB)$. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$. Demonstrați că perpendicularele duse din A, B, C pe $B'C'$, $C'A'$ și respectiv $A'B'$ sunt concurente.

7. Concurență de cercuri

7.1 Fie ABC un triunghi oarecare și $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$. Atunci cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 au un punct comun.

7.2. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABF, ADE, CFD și ECB au un punct comun

Soluțiile problemelor



1.1. Cevienele AA', BB', CC' fiind concurente în P, avem:

$$(*)\quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

Din faptul că AA' și AA'' sunt izotomice (și analoagele), scriem:

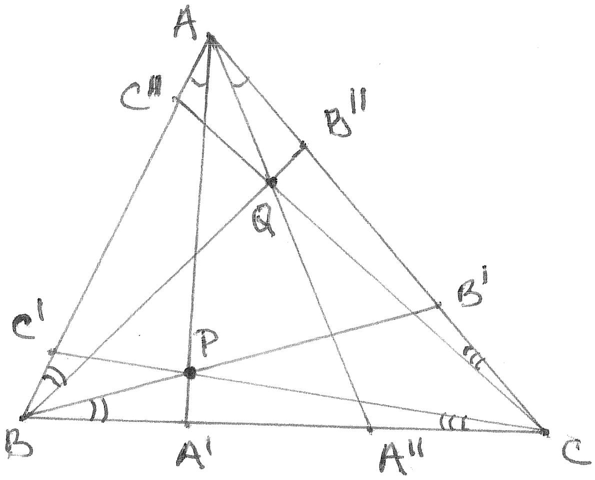
$$(**)\quad A'B=A''C,\quad B'C=B''A,\quad C'A=C''B;\quad A'C=A''B,\ B'A=B''C,\ C'B=C''A$$

Ca urmare a combinării relațiilor (*) și (**), obținem:

$$\frac{A''C}{A''B}\cdot\frac{B''A}{B''C}\cdot\frac{C''B}{C''A}=1,$$

adică, conform reciprocei teoremei lui Ceva, cevienele AA'', BB'' și CC'' sunt concurente.

Obs. P și Q se numesc puncte izotomic conjugate sau izotomice.



1.2. Cevienele AA', BB', CC' fiind concurente în P, avem:

$$(*)\quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$$

AA', AA'' fiind izogonale etc, putem scrie (cf. th. Steiner):

$$(**)\quad \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{A''B}{A''C}=\frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{B''C}{B''A}=\frac{a^2}{c^2},\qquad \frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{C''A}{C''B}=\frac{b^2}{a^2}.$$

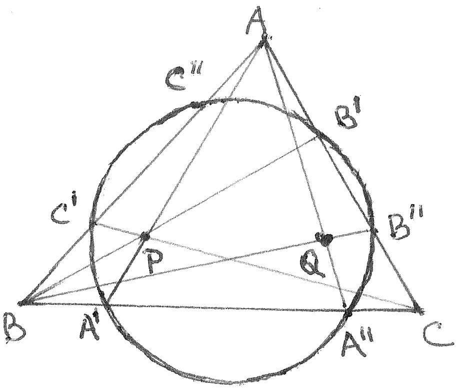
Înmulțind membru cu membru cele trei relații (**) și ținând seama de (*) obținem

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}=1,$$

deci AA'', BB'', CC'' sunt concurente.

Obs. P și Q se numesc puncte izogonal conjugate sau izogonale.

1.3. Conform teoremei lui Ceva avem:



(*) $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$

Scriind puterile vârfurilor A, B, C în raport cu cercul, vom obține relațiile:

(**) $AB'\cdot AB''=AC'\cdot AC''$, $BA'\cdot BA''=BC'\cdot BC''$, $CA'\cdot CA''=CB'\cdot CB''$.

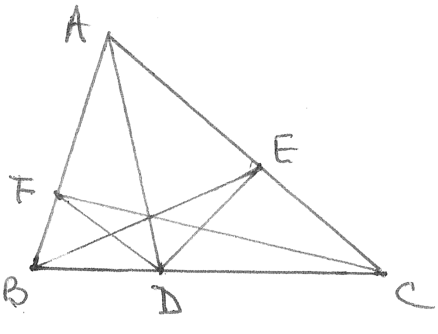
Înmulțind relațiile (**) membru cu membru și ținând seama de (*), deducem că

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=1,$$

adică AA'', BB'' și CC'' sunt concurente.

Obs. Punctele P și Q se numesc în acest caz puncte cicloceviene.

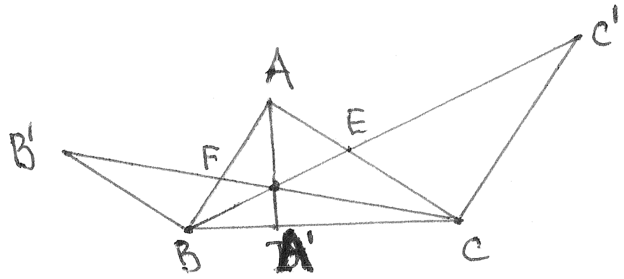
2.1. Ținând seama de teorema bisectoarei avem:



$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=\frac{DB}{DC}\cdot\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{DB}=1,$

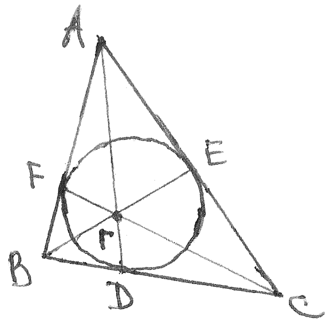
deci AD, BE, CF sunt concurente.

2.2. Fie $\{E\}=AC\cap BC'$ și $\{F\}=AB\cap CB'$. Avem:



$AB^2=BC\cdot BA'$, $AC^2=BC\cdot CA'$, deci $\frac{A'B}{A'C}=\frac{c^2}{b^2}$ (*). Din $\Delta ECC'\sim\Delta EAB$ rezultă că

$\frac{EC}{EA}=\frac{CC'}{AB}=\frac{b}{c}$ (**). Analog, $\frac{FA}{FB}=\frac{b}{c}$ (***). Din (*), (**), (***) obținem $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=1$, adică AA', BC', CB' sunt concurente.

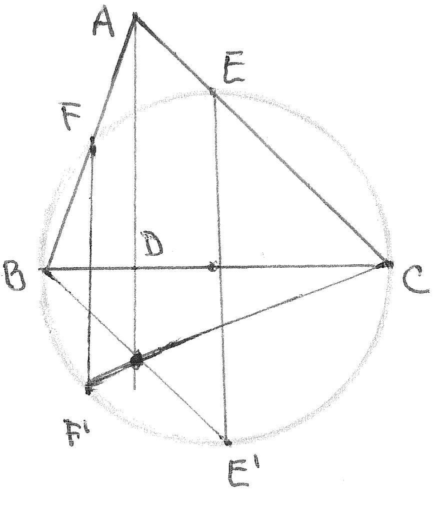


2.3. Se știe că $AE = AF = p-a$, $BD = BF = p-b$ și $CD = CE = p-c$, unde p notează semiperimetrul triunghiului. Ca urmare,

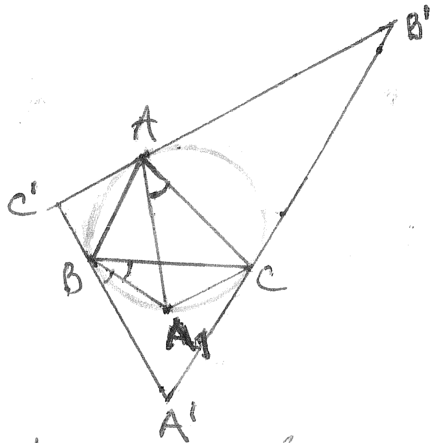
$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB} = \frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{p-c}{p-a}\cdot\frac{p-a}{p-b} = 1$$

și, deci, cevienele AD, BE, CF sunt concurente.

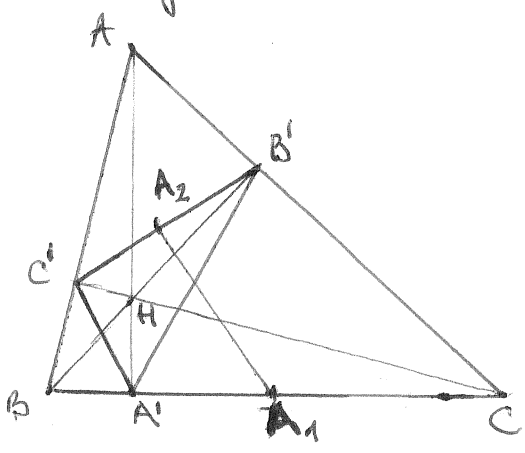
Obs. Punctul de concurență Γ se numește punctul lui Gergonne



3.1. BE' și CF' sunt simetricele înălțimilor BE și CF ale triunghiului ABC în raport cu BC. Ca urmare, AD, BE' și CF' sunt concurente în simetricul ortocentrului H față de BC.

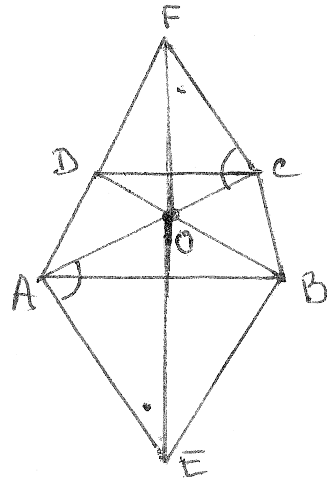


3.2. Vom arăta că AA_1, BB_1 și CC_1 sunt bisectoare în ΔABC, deci vor fi concurente. Într-adevăr, $\Delta A'BC$ este isoscel și deci $m(\widehat{BCA_1}) = m(\widehat{CBA_1}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BCA'}) = \frac{A}{2}$. Rezultă că patrulaterul ABA_1C este inscriptibil și A_1 este mijlocul arcului BC. Deci AA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

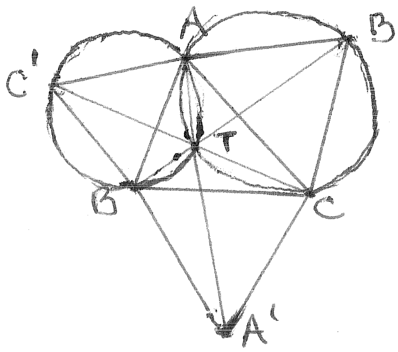


3.3 Fie A_1 mijlocul laturii BC și A_2 mijlocul laturii $B'C'$ a triunghiului ortic. Vom arăta că A_1A_2 și analoagele sunt mediatoarele triunghiului ortic, deci vor fi concurente.

Observăm, mai întâi, că $A_1B' = A_1C'$ ca mediane în triunghiurile dreptunghice BCB' și BCC'. Deci $\Delta A_1B'C'$ este isoscel, iar mediana A_1A_2 va fi mediatoarea laturii $[B'C']$.

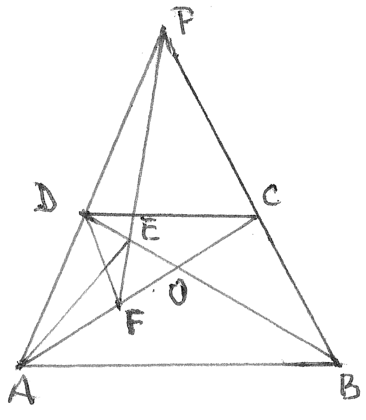


4.1. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor. Vom arăta că punctele O, E, F sunt coliniare. Din $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, avem $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$, deci $\frac{OA}{OC} = \frac{AE}{CF}$. Cum unghiurile marcate sunt congruente, rezultă că $\Delta OAE \sim \Delta OCF$. Deci $\widehat{AOE} \equiv \widehat{COF}$, adică E, O, F sunt coliniare.



4.2. Fie T al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise $\Delta ABC'$ și $\Delta ACB'$. Evident, $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{ATC}) = 120°$. Rezultă că $m(\widehat{BTC}) = 60°$, adică patrulaterul $A'BTC$ este inscriptibil. Ca urmare, $m(\widehat{A'TC}) = m(\widehat{A'BC}) = 60°$. Din $m(\widehat{ATC}) = 120°$ și $m(\widehat{A'TC}) = 60°$ deducem că A, T, A' sunt coliniare. La fel se arată că BB' și CC' trec prin T.

<u>Obs.</u> Punctul T se numește <u>punctul lui Fermat</u>.



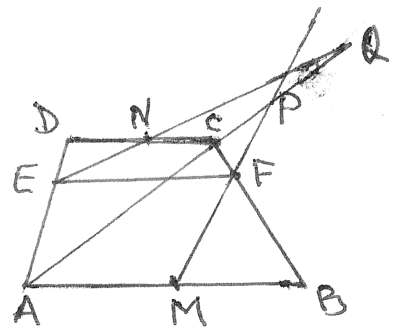
4.3. Vom arăta că P, E, F sunt coliniare, cu reciproca teoremei lui Menelaus aplicată ΔAOD și punctelor F, E, P. Într-adevăr, cu teorema bisectoarei vom avea:

$\frac{FA}{FO}=\frac{AD}{OD}$ și $\frac{EO}{ED}=\frac{AO}{AD}$, iar din $\triangle PDC \sim \triangle PAB$ avem $\frac{PD}{PA}=\frac{DC}{AB}$. Prin înmulțire obținem

$$\frac{FA}{FO}\cdot\frac{EO}{ED}\cdot\frac{PD}{PA}=\frac{AO}{OD}\cdot\frac{DC}{AB}=1,$$

ultima egalitate rezultând din $\triangle ODC \sim OBA$. În final, punctele P, E, F sunt coliniare.

5.1. Fie P și Q intersecțiile diagonalei AC cu MF și respectiv NE. Vom arăta că $P \equiv Q$. Aplicând teorema lui Menelaus $\triangle ABC$ și transversalei FMP și apoi $\triangle ADC$ și transversalei NEQ, obținem:

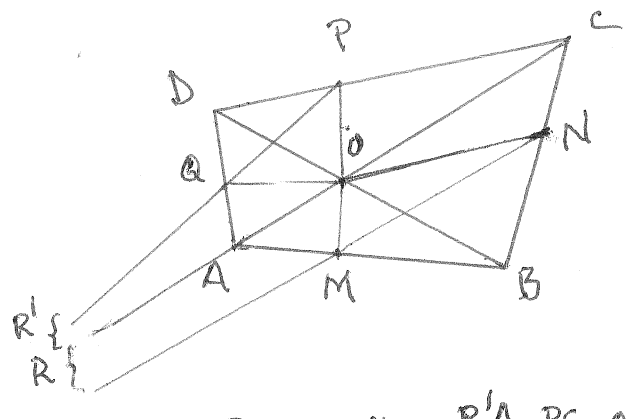


$$\frac{FB}{FC}\cdot\frac{PC}{PA}\cdot\frac{MA}{MB}=1, \text{ deci } \frac{PA}{PC}=\frac{FB}{FC}\ ; \quad \frac{ND}{NC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{EA}{ED}=1, \text{ deci } \frac{QA}{QC}=\frac{EA}{ED}$$

Din $EF \parallel AB$ avem $\frac{FB}{FC}=\frac{EA}{ED}$ și obținem $\frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC}$, care impune ca $P \equiv Q$.

5.2. Fie $\{R\}=AC\cap MN$ și $\{R'\}=AC\cap PQ$. Vom arăta că $R\equiv R'$. Cu teorema bisectoarei, obținem

$$\frac{QD}{QA}=\frac{OD}{OA}, \quad \frac{PC}{PD}=\frac{OC}{OD}.$$



Cu teorema lui Menelaus aplicată $\triangle ADC$ și transversalei PQR avem: $\frac{R'A}{R'C}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{QD}{QA}=1$. Din acestea, obținem: $\frac{R'A}{R'C}=\frac{OA}{OC}$. Analog se obține și $\frac{RA}{RC}=\frac{OA}{OC}$. Ultimele două relații conduc la $\frac{RA}{RC}=\frac{R'A}{R'C}$, deci $R\equiv R'$.

6.1. Notăm cu D, E, F proiecțiile centrelor cercurilor exînscrise I_A, I_B, I_C pe BC, CA și respectiv AB. Știm că $BD = AE = p-c$, $BF = CE = p-a$ și $AF = CD = p-b$. Atunci

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = (p-c)^2 - (p-b)^2 + (p-a)^2 - (p-c)^2 + (p-b)^2 - (p-a)^2 = 0,$$

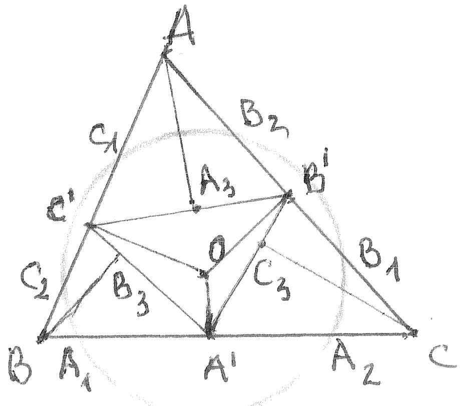
deci, conform teoremei lui Carnot, I_AD, I_BE, I_CF sunt concurente.

6.2. Notăm $BM = x$, $CN = y$, $AP = z$. Atunci

$$MB^2 - MC^2 + NC^2 - NA^2 + PA^2 - PB^2 = x^2 - (a-x)^2 + y^2 - (b-y)^2 + z^2 - (c-z)^2 = 2a(x+y+z) - 3a^2 = 2a\cdot\frac{3a}{2} - 3a^2 = 0,$$

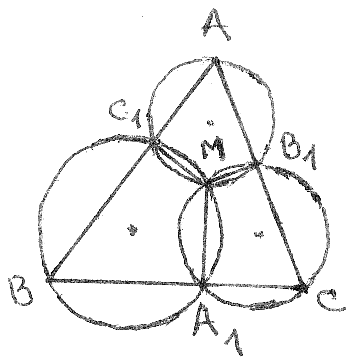
deci, conform teoremei lui Carnot, afirmația are loc.

6.3. Avem: $OA' \perp BC$, $OB' \perp CA$ și $OC' \perp AB$. Notăm cu A_3, B_3 și C_3 proiecțiile punctelor A, B, C pe $B'C'$, $C'A'$ și respectiv $A'B'$. Atunci



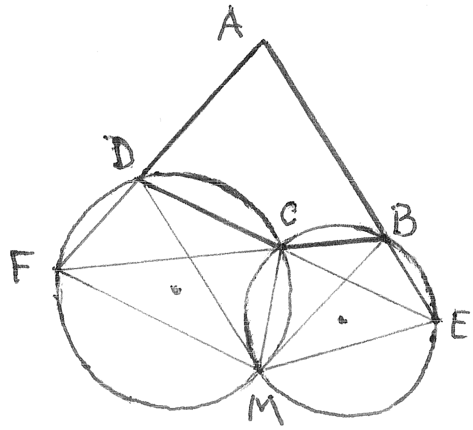
$$A_3B'^2 - A_3C'^2 + B_3C'^2 - B_3A'^2 + C_3A'^2 - C_3B'^2 =$$
$$(AB'^2 - AA_3^2) - (AC'^2 - AA_3^2) + (BC'^2 - BB_3^2) - (BA'^2 - BB_3^2) +$$
$$(CA'^2 - CC_3^2) - (CB'^2 - CC_3^2) = AB'^2 - AC'^2 + BC'^2 - BA'^2 +$$
$$+ CA'^2 - CB'^2 = -[A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2] = 0,$$

deci putem aplica teorema lui Carnot și conchide că dreptele din enunț sunt concurente.



7.1. Fie M al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 și BC_1A_1. Patrulaterele AB_1MC_1 și BC_1MA_1 fiind inscriptibile, avem: $\widehat{AB_1M} \equiv \widehat{MC_1B}$ și $\widehat{MC_1B} \equiv \widehat{MA_1C}$.

Deci $\widehat{AB_1M} \equiv \widehat{MA_1C}$, adică patrulaterul MA_1CB_1 este inscriptibil. Așadar, cercul circumscris triunghiului CA_1B_1 trece prin M.



7.2. Fie M al doilea punct de intersecție a cercurilor BCE și DCF. Avem: $\widehat{CME} \equiv \widehat{CBA}$ și $\widehat{CMF} \equiv \widehat{CDA}$. Rezultă că $m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{BMF}) = m(\widehat{BAF}) + m(\widehat{BMC}) + m(\widehat{CMF}) = m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{AED}) + m(\widehat{ADE}) = 180^\circ$

Deci, patrulaterul ABMF este inscriptibil. Punctul M aparține și cercului circumscris triunghiului ABF. Analog se arată că M este și pe cercul circumscris triunghiului ADE.