

A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 martie 2015

Prima probă de evaluare pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2015

BJ1. Fie numărul $a = 123456789$. Să se compare numerele

$$2014^{9^{9^a}} \quad \text{și} \quad 2015^{a^{a^9}} .$$

BJ2. Să se arate un exemplu de 15 numere naturale nenule cu proprietatea că dacă fiecare dintre ele este mărit cu unu, atunci produsul tuturor numerelor mărite este de 2015 ori mai mare decât produsul numerelor inițiale.

BJ3. Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC . Tangentele duse la cercul Ω în punctele A și B se intersectează în punctul P , iar mediatoarea laturii (BC) taie dreapta AC în punctul Q . Demonstrați că dreptele BC și PQ sunt paralele.

BJ4. Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, \dots, 33$. Un elev efectuează următorul procedeu: alege două numere dintre cele scrise pe tablă astfel, încât unul dintre ele este multiplul celuilalt număr; după alegere el șterge cele două numere și scrie pe tablă câtul lor. Elevul repetă procedeu de atâtea ori până când pe tablă rămân doar numere fără multipli. Să se determine câte numere rămân pe tablă în situația, în care elevul nu mai poate repeta procedeu.

Timp de lucru: 4 ore 30 minute.

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59 – ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 2 марта 2015 года

Первый отборочный тур для Юниорской Балканской Математической Олимпиады 2015 года

ВJ1. Пусть задано число $a = 123456789$. Сравните числа

$$2014^{9^{9^a}} \quad \text{и} \quad 2015^{a^{a^9}} .$$

ВJ2. Найдите 15 ненулевых натуральных чисел таких, что при прибавлении единицы к каждому числу, произведение всех увеличенных чисел в 2015 раза больше чем произведение исходных чисел.

ВJ3. Пусть Ω описанная окружность треугольника ABC . Касательные, проведенные к окружности Ω в точках A и B , пересекаются в точке P , а серединный перпендикуляр стороны (BC) пересекает прямую AC в точке Q . Докажите, что прямые BC и PQ параллельны.

ВJ4. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 33$. Один ученик делает следующий приём: выбирает два числа из написанных на доске так, что одно из чисел кратно другому; после этого выбора он стирает эти два числа и пишет на доске частное этих чисел. Ученик повторяет прием столько раз, пока на доске останутся только числа без кратных. Найдите сколько чисел останутся на доске после того, как ученик не сможет уже повторить указанный приём.

Время работы: 4 часа 30 минут.

Каждая правильно решенная задача оценивается 7 очками.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!