Primul test de selecţie pentru OBMJ
Braşov, 4 aprilie 2013

Problema 1. Fie $a, b, c, d > 0$ cu $abcd = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \leq 1.$$

Problema 2. Se dau greutăţile 1 g, 2 g, ... , 200 g şi se aşază câte 100 pe talerele unei balanţe. Demonstraţi că se pot schimba 50 de greutăţi din talerul stâng cu 50 de greutăţi din talerul drept astfel încât balanţa să fie în echilibru.

Problema 3. În planul unui cerc de centru O şi rază r se consideră o dreaptă care nu trece prin O. O lăcustă sare dintr-un punct al cercului într-unul al dreptei, apoi înapoi pe cerc şi aşa mai departe, lungimea fiecărei sărituri fiind egală cu r. Demonstraţi că lăcusta poate ajunge în cel mult 8 puncte ale planului.

Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq AC$, D este piciorul bisectoarei interioare din A, iar E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE se taie a doua oară în M. Arătaţi că $ME = MF$.

Problema 5. a) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, există $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care mulţimea

$$A_n = \{a - b,\ a^2 - b^2,\ a^3 - b^3,\ \ldots,\ a^n - b^n\}$$

conţine doar numere naturale nenule.
b) Fie a şi b două numere reale diferite cu proprietatea că mulţimea

$$A = \{a^k - b^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

conţine doar numere naturale nenule. Arătaţi că a şi b sunt numere întregi.