A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 martie 2014

A doua probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2014

BJ5. Să se arate că pentru orice număr natural *n* numărul

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n+3$$

este un pătrat perfect. (Prin $[x]$ se notează partea întreagă a numărului real *x*.)

BJ6. Numerele nenegative *x*, *y* şi *z* verifică egalitatea $x + y + z = 1$. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a expresiei

$$E(x,y,z)=(x+2y+3z)\cdot(6x+3y+2z)\,.$$

BJ7. Fie triunghiul dreptunghic isoscel *ABC* cu $m(\angle A) = 90^{\circ}$. Pe semidreapta *AC* se iau punctele *E* şi *F* astfel încât $m(\angle ABE) = 15^{\circ}$ şi $CE = CF$. Să se determine măsura unghiului *CBF*.

BJ8. Profesorul a scris pe tablă un număr natural nenul. Profesorul le explică elevilor că ei pot şterge numărul scris pe tablă şi pot scrie în locul lui un număr natural nou, ori de câte ori doresc, aplicând de fiecare dată, la alegere, una dintre următoarele două reguli:

1) în locul numărului curent *n* se scrie numărul $3n + 13$, sau
2) în locul numărului curent *n* se scrie numărul $\sqrt{n}$ (a doua regulă se poate aplica doar în cazul când numărul *n* este un pătrat perfect).

a) Dacă iniţial pe tablă a fost scris numărul 256, este oare posibil ca, după un număr finit de paşi (înlocuiri de numere), să se obţină pe tablă numărul 55 ?

b) Dacă iniţial pe tablă a fost scris numărul 55, este oare posibil ca, după un număr finit de paşi (înlocuiri de numere), să se obţină pe tablă numărul 256 ?

Timp de lucru: 4 ore 30 minute. Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 29 марта 2014 г.

Второй отборочный тур для Балканской Юношеской Математической Олимпиады 2014 г.

BJ5. Показать, что для любого натурального числа n число

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n+3$$

является полным квадратом. (Через $[x]$ обозначается целая часть действительного числа x.)

BJ6. Неотрицательные числа x, y и z удовлетворяют равенству $x + y + z = 1$. Определить наибольшее возможное значение выражения

$$E(x,y,z)=(x+2y+3z)\cdot(6x+3y+2z).$$

BJ7. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC, в котором $m(\angle A) = 90^{o}$. На полупрямой AC берутся точки E и F такие, что $m(\angle ABE) = 15^{o}$ и $CE = CF$. Найти меру угла CBF.

BJ8. Преподаватель написал на доске некоторое натуральное ненулевое число. Преподаватель объясняет учащимся, что они могут стереть написанное на доске число и вместо него написать новое натуральное число, сколько раз они хотят, применяя каждый раз, по их усмотрению, одно из следующих двух правил:

1) вместо имеющегося числа n пишется число $3n + 13$, или
2) вместо имеющегося числа n пишется число $\sqrt{n}$ (второе правило можно применять только в случае, когда число n является полным квадратом).

а) Если на доске первоначально было написано число 256, можно ли за конечное число шагов (замен чисел), получить на доске число 55 ?

б) Если на доске первоначально было написано число 55, можно ли за конечное число шагов (замен чисел), получить на доске число 256 ?

Время работы: 4 часа 30 минут. Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 очков.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!