A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 28 martie 2015

A doua probă de evaluare pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2015

Soluţii

BJ 5. Fie cele 21 de numere întregi distincte, scrise în ordine crescătoare, sunt $a_1; a_2; ...; a_{21}$, unde $a_1 < a_2 < ... < a_{20} < a_{21}$, iar $a_{21} = 2014$.

Din $a_1 + a_2 + ... + a_{11} > a_{12} + a_{13} + ... + a_{21}$, rezultă că

$a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + ... + (a_{21} - a_{11}) > 10 \cdot 10 = 100$. Rezultă că $a_1 \geq 101$. Atunci $a_1 = 101$.

Din $100 \geq (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + ... + (a_{21} - a_{11})$ şi $a_{10+i} - a_i \geq 10$, $i = 2; 3; ...; 11$, rezultă că $a_{11} = a_{21} - 10 = 2004$, $a_{12} = 2005$, $a_{13} = 2006$, … , $a_{20} = 2013$.

Atunci $a_2 = a_{12} - a_{10} = 2005 - 10 = 1995$, $a_{13} = 1996$, …, $a_{10} = a_{20} - a_{10} = 2013 - 10 = 2003$.

Deci, cele 19 numere sunt: 1995, 1996, ...,2012, 2013.

BJ 6. Fie $a, b, c \in R$ şi $ab + bc + ca = 2015abc$ (1), $2015(a + b + c) = 1$ (2).

Înmulţind egalităţile (1) şi (2) parte cu parte obţinem:

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = abc \Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) + ac(a + b) + bc(a + b) + c^2(a + b) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(ab + ac + bc + c^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = 0 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow$$

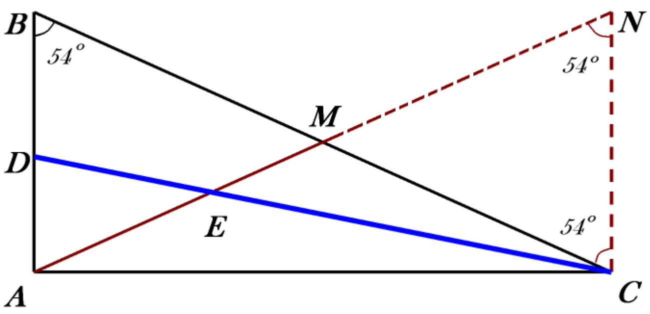
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0, \\ b + c = 0, \\ c + a = 0. \end{array}\right.$$

Dacă $a + b = 0$, atunci $c = \dfrac{1}{2015}$ şi avem $E = (-b)^{2015} + b^{2015} + \left(\dfrac{1}{2015}\right)^{2015} = \dfrac{1}{2015^{2015}}$.

Pentru $b + c = 0$, avem $a = \dfrac{1}{2015}$ şi $E = \dfrac{1}{2015^{2015}}$.

Pentru $c + a = 0$, avem $b = \dfrac{1}{2015}$ şi $E = \dfrac{1}{2015^{2015}}$. **Răspuns**: $E = \dfrac{1}{2015^{2015}}$.

BJ 7. Prelungim semidreapta $(AM$ şi luăm $N \in (AM$, $M \in (AN)$, astfel încît $AM = MN$.



Avem $\Delta AMB \overset{LUL}{\equiv} \Delta NMC$. Rezultă că $CN = AB$, $m(\angle MCN) = m(\angle MNC) = 54^o$. Cum $m(\angle BCA) = 36^o$, rezultă că $CN \perp AC$. Astfel, patrulaterul $ACNB$ este un dreptunghi cu $AN = BC$.

Triunghiurile AMB, AMC şi MCN sunt isoscele şi $m(\angle MCA) = m(\angle MAC) = 36^o$. Cum CD este bisectoare $\Rightarrow m(\angle BCD) = m(\angle ACD) = 18^o$. Unghiul NEC este unghi exterior al triunghiului $AEC \Rightarrow m(\angle NEC) = m(\angle ECA) + m(\angle EAC) = 36^o + 18^o = 54^o$. Rezultă că ΔCEN este la fel isoscel cu $CE = CN = AB$.

BJ 8. Egalităţile din enunţ se scriu astfel: $[a,b] = 2^3 \cdot 5^3$, $[b,c] = 2^4 \cdot 5^3$, $[c,a] = 2^4 \cdot 5^3$.

Rezultă că $a = 2^m \cdot 5^r$, $b = 2^n \cdot 5^s$, $c = 2^p \cdot 5^t$, unde $p = 4$, $m, n, r, s, t \in \{0, 1, 2, 3\}$, $3 \leq m + n \leq 6$, $6 \leq r + s + t \leq 9$, $\max(m, n) = 3$, $\max(r, s, t) = 3$. Avem următoarele posibilităţi:

m	3	3	3	3	2	1	0
n	3	2	1	0	3	3	3

r	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0
s	3	3	3	3	2	1	0	3	3	3

p	4	4	4	4	4	4	4

Total: 7 variante

t	3	2	1	0	3	3	3	3	3	3

Total: 10 variante

Rezultă că avem $70 \times 10 = 70$ de triplete cu proprietatea din enunţ.