A 59 – a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 2 martie 2015

Prima probă de evaluare pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2015

Soluții

BJ1/2015 Fie $a=123456789$. Să se compare numerele

$$2014^{9^{9^{a}}} \quad \text{şi} \quad 2015^{a^{a^{9}}}.$$

Soluţie. Avem

$$9^9=9\cdot 9^8>9\cdot 81^4>9\cdot 80^4=9\cdot 64^2\cdot 10^4>9\cdot 60^2\cdot 10^4=$$

$$=9\cdot 3600\cdot 10^4=324\cdot 10^6>27\cdot 10^7>a\,.$$

Rezultă că $9^{81}=\left(9^9\right)^9>a^9$ şi

$$a^{a^{9}}<a^{9^{81}}<\left(9^9\right)^{9^{81}}=9^{9\cdot 9^{81}}=9^{9^{82}}.$$

Obţinem

$$2015^{a^{a^{9}}}<2015^{9^{9^{82}}}<\left(2014^9\right)^{9^{9^{82}}}=$$

$$=2014^{9\cdot 9^{9^{82}}}=2014^{9^{9^{82}+1}}<$$

$$<2014^{9^{9^{83}}}<2014^{9^{9^{a}}}.$$

BJ2/2015. Să se arate un exemplu de 15 numere naturale nenule cu proprietatea că dacă fiecare dintre ele este mărit cu unu, atunci produsul tuturor numerelor mărite este de 2015 ori mai mare decât produsul numerelor iniţiale.

Soluţie. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ numere naturale nenule cu proprietatea din enunţ. Atunci are loc egalitatea

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_{15}+1)=2015\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{15}\,. \qquad (1)$$

Din reprezentarea canonică a numărului $2015=5\cdot 13\cdot 31$ rezultă că numerele prime 5, 13, 31 divid numărul $(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_{15}+1)$. Rezultă că din cele 15 numere trei sunt egale cu 4, 12 şi 30. Fie $x_{15}=30,\ x_{14}=12,\ x_{13}=4.$ Egalitatea (1) se scrie în forma

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_{12}+1)\cdot\ 5\cdot 13\cdot 31=5\cdot 13\cdot 31\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{12}\cdot\ 4\cdot 12\cdot 30 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_{12}+1)=2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{12}$$

Dacă punem $x_{12}=4,\ x_{11}=x_{10}=2$ atunci ultima egalitate devine

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_9+1)=2^9\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_9\,.$$

Numerele naturale nenule $x_9=\ldots=x_2=x_1=1$ satisfac ultima egalitate.
Astfel, cele 15 numere cu proprietatea din enunţ sunt

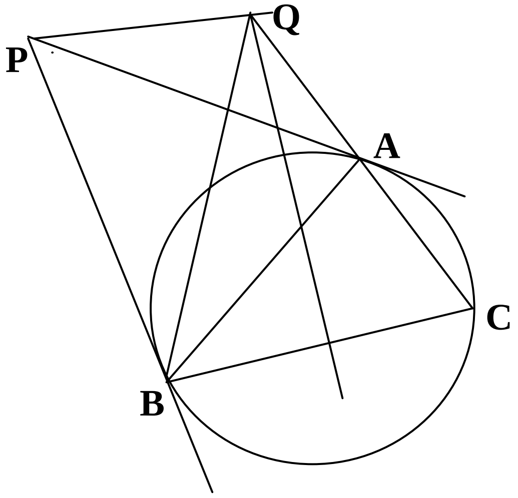
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 12, 30.

Avem
$$1^9\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 12\cdot 30\cdot 2015=2^9\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot 31=(1+1)^9\cdot(2+1)^2\cdot(4+1)^2\cdot(12+1)\cdot(30+1).$$

Răspuns: Numerele sunt 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 12, 30.

BJ3/2015. Fie Ω cercul circumscris triunghiului ABC. Tangentele duse la cercul Ω în punctele A şi B se intersectează în punctul P, iar mediatoarea laturii (BC) taie dreapta AC în punctul Q. Demonstraţi că dreptele BC şi PQ sunt paralele .

Soluţie.



Unim vîrful B cu punctul Q. Triunghiurile BCQ şi BPA sunt isoscele. Fie

$$m\,(\angle BCQ) = m\,(\angle CBQ) = \alpha = \frac{m(arc\ AB)}{2}.$$

Atunci

$$m\,(\angle PAB) = m\,(\angle PBA) = \alpha = \frac{m(arc\ AB)}{2}$$

(ca unghiuri formate de coardă şi o tangentă) şi

$$m\,(\angle BQC) = m\,(\angle BPA) = 180^0 - 2\alpha.$$

Rezultă că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil, de unde rezultă că

$$m\,(\angle PQB) = m\,(\angle PAB) = \alpha = m\,(\angle QBC).$$

Dar unghiurile PQB şi QBC sunt alterne interne obţinute la intersecţia dreptelor BC şi PQ cu secanta BQ. Cum aceste unghiuri sunt congruente, rezultă că dreptele BC şi PQ sunt paralele.

BJ4/2015. Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, \ldots, 33$. Un elev efectuează următorul procedeu: alege două numere dintre cele scrise pe tablă astfel, încât unul dintre ele este multiplul celuilalt număr; după alegere el şterge cele două numere şi scrie pe tablă câtul lor. Elevul repetă procedeul de atâtea ori până când pe tablă rămân doar numere fără multipli. Să se determine câte numere rămân pe tablă în situaţia în care elevul nu mai poate repeta procedeul.

Soluţie. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 32, 33\}$. Cum pe tablă sunt iniţial scrise doar elementele mulţimii A, atunci numerele prime 17, 19, 23, 29 şi 31 vor rămânea pe tablă, deoarece ele nu au multipli în mulţimea A. Vom demonstra că pe tablă vor rămânea încă 2 numere diferite de cele 5 indicate mai sus.

Reprezentăm produsul celor 33 numere scrise iniţial pe tablă ca produs de factori primi. Avem

$$P = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^{7} \cdot 7^{4} \cdot 11^{3} \cdot 13^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 .$$

La fiecare pas elevul alege perechea (x, y) cu $x|y$, adică $x = a,\ y = k \cdot a$ şi le şterge de pe tablă, scriind pe tablă numărul $k = \frac{y}{x}$. Cum $x \cdot y = k \cdot a^2$, rezultă că efectuarea procedeului nu schimbă paritatea exponenţilor ale numerelor prime din produsul P. În special, factorii primi 2, 3, 5 şi 11 care au exponenţii impari vor rămînea în produsul final. Cum $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$, rezultă că pe tablă vor fi scrise cel puţin 2 numere produsul cărora este divizibil la $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Astfel, pe tablă vor rămânea cel puţin 7 numere.

Consecutivitatea de paşi

$$(16,32) \to 2,\ (15,30) \to 2,\ (14,28) \to 2,\ (13,26) \to 2,\ (12,24) \to 2,\ (11, 22) \to 2,$$

$$(9,27) \to 3,\ (7,21) \to 3,\ (6,18) \to 3,\ (5, 25) \to 5,\ (4, 20) \to 5,\ (2,8) \to 4,$$

$$(5,5) \to 1,\ (2, 4) \to 2,\ (3\ 3) \to 1,\ (3, 3) \to 1,\ (2,2) \to 1,\ (2,2) \to 1,\ (2,2) \to 1$$

lasă pe tablă numerele 17, 19, 23, 29, 31, 10, 33 şi 7 unităţi. În următorii 7 paşi unităţile pot fi eliminate de pe tablă astfel, încât pe tablă rămân numerele
17, 19, 23, 29, 31, 10, 33

Răspuns: Pe tablă vor rămânea 7 numere.