Primul test de selecţie pentru OBMJ
Braşov, 4 aprilie 2013

Problema 1. Fie $a, b, c, d > 0$ cu $abcd = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+d+2}+\frac{1}{d+a+2} \leq 1.$$

Gheorghe Eckstein

Soluţia 1.
Substituim $a = x^4$, $b = y^4$, $c = z^4$, $d = t^4$, cu $x, y, z, t > 0$, $xyzt = 1$. Atunci $\frac{1}{a+b+2} =$

$$\frac{1}{x^4+y^4+2} \leq \frac{1}{xy(x^2+y^2)+2} = \frac{1}{\dfrac{x^2+y^2}{zt}+2} \leq \frac{1}{\dfrac{2(x^2+y^2)}{z^2+t^2}+2} = \frac{z^2+t^2}{2(x^2+y^2+z^2+t^2)},$$

cu egalitate dacă $x = y$ şi $z = t$.

Scriind şi relaţiile analoage pentru ceilalţi trei termeni şi adunând, obţinem inegalitatea cerută, cu egalitate dacă $x = y = z = t = 1$, adică $a = b = c = d = 1$.

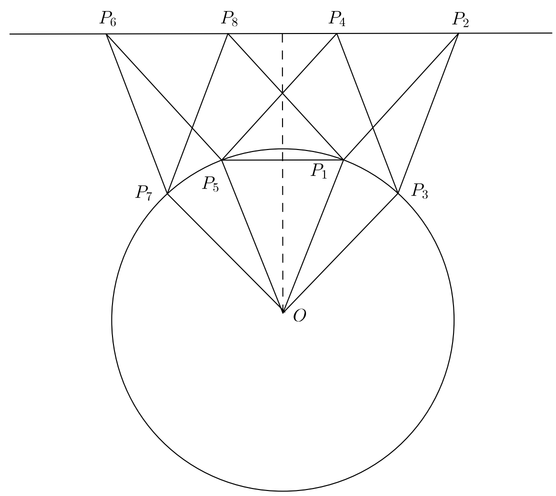
Soluţia 2.
Avem $\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{c+d+2} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}+2}+\frac{1}{2\sqrt{cd}+2}$. Notând $\sqrt{ab} = x$, avem $\sqrt{cd} = \frac{1}{x}$ şi suma de mai sus devine $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}$.

Procedând similar pentru ceilalţi doi termeni ai sumei obţinem relaţia dorită.

Problema 2. Se dau greutăţile 1 g, 2 g, ..., 200 g şi se aşază câte 100 pe talerele unei balanţe. Demonstraţi că se pot schimba 50 de greutăţi din talerul stâng cu 50 de greutăţi din talerul drept astfel încât balanţa să fie în echilibru.
Soluţie.
Numim pereche două greutăţi cu suma 201g. Dorim ca în final, în fiecare taler să avem 50 de perechi.
Dacă în talerul stâng există greutăţile a_1, a_2, ..., a_{50} care au perechile b_1, b_2, ..., b_{50} în talerul drept, mutăm greutaţile astfel încât, în final, în talerul stâng să se afle greutăţile a_1, a_2, ..., a_{50}, b_1, b_2, ..., b_{50}.
În cazul contrar, există 25 de perechi în talerul stând şi 25 de perechi în talerul drept. Mutând 25 de perechi din talerul drept lângă cele 25 de perechi din talerul stâng obţinem rezultatul dorit.

Problema 3. În planul unui cerc de centru O şi rază r se consideră o dreaptă care nu trece prin O. O lăcustă sare dintr-un punct al cercului într-unul al dreptei, apoi înapoi pe cerc şi aşa mai departe, lungimea fiecărei sărituri fiind egală cu r. Demonstraţi că lăcusta poate ajunge în cel mult 8 puncte ale planului.

Soluţie.

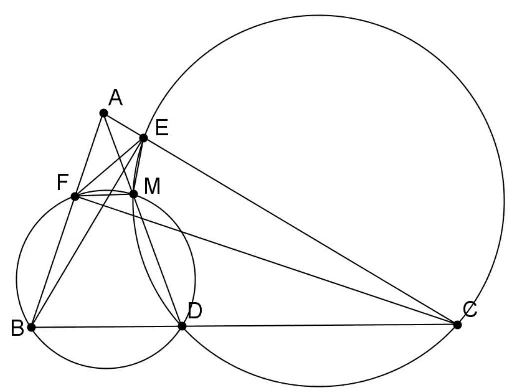


Fie d dreapta din enunţ. Presupunem că, atunci când are de ales între numai două locuri în care poate sări, lăcusta nu sare înapoi în locul din care a venit. Să notăm cu P_1 punctul de pornire al lăcustei, cu P_2 punctul de pe dreaptă în care a sărit din P_1 şi aşa mai departe. Deoarece lungimile salturilor sunt egale cu r, $OP_1P_2P_3$ este romb (eventual degenerat). Analog, şi $OP_3P_4P_5$ este romb. De aici rezultă imediat că triunghiurile P_1OP_5 şi $P_2P_3P_4$ sunt congruente (LUL) şi apoi că $P_1P_5 \parallel d$. Deducem de aici că punctele P_1 şi P_5 sunt simetrice faţă de perpendiculara din O pe dreapta d. (Acest lucru rămâne adevărat şi în cazurile degenerate.) Dacă acum lăcusta îşi continuă salturile, ea va ajunge într-un punct P_9 care, se arată ca mai sus, este simetricul lui P_5 faţă de perpendiculara din O pe dreapta d, adică P_1. Prin urmare lăcusta nu ajunge decât în punctele P_k, $k = \overline{1, 8}$ (care nu sunt neapărat distincte).

Problema 4. În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB \neq AC$, D este piciorul bisectoarei interioare din A, iar E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE se taie a doua oară în M. Arătaţi că $ME = MF$.

Leonard Giugiuc

Soluţie.



Triunghiurile AEF şi ABC sunt asemenea, deci $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, de unde rezultă că punctul A este pe axa radicală a celor două cercuri, deci $M \in AD$. $m(\angle EMF) = 360^\circ - (180^\circ - m(\angle FBD)) - (180^\circ - m(\angle ECD)) = m(\angle B) + m(\angle C) = 180^\circ - m(\angle A)$; deci patrulaterul $AEMF$ este inscriptibil. Astfel $\angle MEF \equiv \angle FAM$ şi $\angle MFE \equiv \angle EAM$, deci triunghiul MEF este isoscel cu $ME = MF$.

Problema 5. a) Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, există $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care mulţimea

$$A_n = \{a - b,\ a^2 - b^2,\ a^3 - b^3,\ \dots,\ a^n - b^n\}$$

conţine doar numere naturale nenule.
b) Fie a şi b două numere reale diferite cu proprietatea că mulţimea

$$A = \{a^k - b^k |\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

conţine doar numere naturale nenule. Arătaţi că a şi b sunt numere întregi.

Soluţie.

a) Pentru $a = 2^{n-1} + \frac{1}{2}$ şi $b = \frac{1}{2}$ avem

$a^k - b^k = 2^{n-1} \cdot \dfrac{(2^n+1)^{k-1} + (2^n+1)^{k-2} + \cdots + (2^n+1) + 1}{2^{k-1}} =$
$2^{n-k} \cdot \left((2^n+1)^{k-1} + (2^n+1)^{k-2} + \cdots + (2^n+1) + 1\right) \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
b) Dacă $a - b = k_1 \in \mathbb{N}^*$ şi $(a-b)(a+b) = k_2 \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = \dfrac{k_2 + k_1^2}{2k_1}$ şi $b = \dfrac{k_2 - k_1^2}{2k_1}$. Cel mai mare divizor comun al numerelor $k_2 + k_1^2$ şi $2k_1$ este acelaşi cu cel al numerelor $k_2 - k_1^2$ şi $2k_1$, deci a şi b sunt numere raţionale care, în forma ireductibilă, au acelaşi numitor. Fie $a = \dfrac{p}{q}$ şi $b = \dfrac{r}{q}$, unde $(p, q) = 1$ şi $(r, q) = 1$. $a^n - b^n = \dfrac{(p-r)\left(p^{n-1} + p^{n-2}r + \cdots + pr^{n-2} + r^{n-1}\right)}{q^n} =$
$\dfrac{(p-r)\left(p^{n-1} - r^{n-1} + \left(p^{n-2} - r^{n-2}\right)r + \left(p^{n-3} - r^{n-3}\right)r^2 + \cdots + (p-r)r^{n-2} + nr^{n-1}\right)}{q^n} =$
$\dfrac{(p-r)\left(M_{q^{n-1}} + M_{q^{n-2}} + \cdots + M_{q^2} + M_q + nr^{n-1}\right)}{q^n} \in \mathbb{N}^*$. Există n_0, m, s cu $(m, q) = 1$, astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$, $a^n - b^n = \dfrac{m\left(M_{q^{n-1}} + M_{q^{n-2}} + \cdots + M_{q^2} + M_q + nr^{n-1}\right)}{sq^{n-n_0}}$, deci $q | n$ pentru orice $n > n_0$, astfel $q = 1$, deci $a, b \in \mathbb{Z}$.