1. The radii of three concentric circles are 1, 2, and 3 units. A point is marked on each circle such that they form a regular triangle. What may be the length of the side of the triangle?
KöMaL, pb **B. 4314.**, decembrie 2010, dată şi la VO, etapa finală 2012, Câmpulung
Soluţie: Fie O centrul cercurilor şi $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral cu A_i pe cercul de rază i. Deoarece $OA_3 = OA_1 + OA_2$ rezultă că $A_1OA_2A_3$ e inscriptibil şi că $m(A_1OA_2) = 120°$. Atunci $A_1A_2^2 = 1^2 + 2^2 + 1 \cdot 2 = 7$.

2. A line of one hundred boys and another line of one hundred girls are standing facing one another. Every boy chooses a girl (it is allowed for more than one boy to choose the same girl) and walks up to her along the shortest path. In doing so, their paths do not cross. Then the boys go back to their places, and now the girls do the same, making sure that their paths do not cross as they are walking up to the chosen boy. Prove that there is a girl and a boy who chose each other.
KöMaL, pb **B. 3500.**, noiembrie 2001
Soluţie: Funcţia care la numărul de ordine al fiecărui băiat îi asociază numărul de ordine al fetei alese este crescătoare. La fel, funcţia care la numărul de ordine al fiecărei fete îi asociază numărul de ordine al băiatului ales este şi ea crescătoare. Compusa celor două funcţii va fi crescătoare de la $\{1, 2, ..., 100\}$ în ea însăşi, deci va avea (cel puţin) un punct fix.

3. There are 98 sticks lying on the table, their lengths are $1, 2, 3, ..., 98$ units. Ann and Bill play the following game: With Ann starting the game, they take turns removing one stick of their choice. The game ends when there remain exactly three sticks on the table. Ann wins if the three sticks can form a triangle. Otherwise, Bill wins. Which player has a winning strategy?
KöMaL, pb **B. 4414.**, ianuarie 2012
Soluţie: Ann scoate $1, 2, \ldots, 48$ şi câştigă.

4. There are 99 sticks lying on a table, their lengths are $1, 2, 3, ..., 99$ units. Andrea and Bill play the following game: they take turns removing one stick of their choice. Andrea starts the game. The game ends when there are exactly three sticks remaining on the table. If it is possible to make a triangle out of the three sticks then Andrea wins. Otherwise, Bill is the winner. Who has a winning strategy?
KöMaL, pb **B. 4422.**, februarie 2012
Soluţie: Bill are strategie câştigătoare. Andrea face 48 de mutări, Bill face 48. Dacă Andrea ia ≤ 50, Bill ia cel mai mic dintre numerele mai mari ca 50, dacă Andrea ia mai mare ca 50, Bill ia cel mai mare din numerele mai mici ca 51. Fie x numărul de beţe luate de Andrea din grămada ,,mică": $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Atunci Andrea ia $48 - x$ beţe din grămada ,,mare", $\{51, 52, \ldots, 99\}$. Bill ia $48 - x$ din grămada mică şi x din grămada mare, deci rămân două beţe din grămada mică şi un băţ din grămada mare. Băţul din grămada mare rămas este cel puţin $51 + x$, iar băţul cel mai mare rămas în grămada mică este $x+2$. Cum $(x+2)+(x+1) \leq (51+x)$ $(x \leq 48)$, Bill câştigă.

5. Prove that in any set of seven different positive integers there are three numbers such that the greatest common divisor of any two of them leaves the same remainder when divided by three.
KöMaL, pb **B. 4345.** (Suggested by S. Kiss, Budapest)
Soluţie: Dacă printre numere există 3 multipli de 3, e gata.
În caz contrar putem alege 6 numere dintre care cel mult unul este M3.
Atunci oricare 2 din aceste 6 numere au cmmmdc M3+1 sau M3+2.
Restul e o problemă clasică:
Muchiile unui graf complet cu 6 vârfuri se colorează cu roşu şi albastru. Arătaţi că există un triunghi monocolor.
Aici vârfurile sunt cele 6 numere alese, muchiile roşii unesc vârfuri numere care au cmmdc=M3+1, cele albastre unesc vârfuri cu cmmdc=M3+2.
(*rezolvarea ,,problemei clasice":* Luăm un vârf A. Din el pleacă 3 muchii. Măcar 3 vor avea aceeaşi

culoare. Printre cele 3 muchii care unesc extremităţile acestor 3 muchii, fie găsim o muchie care închide, cu A, un triunghi monocolor, fie nu, şi atunci aceste 3 muchii formează un triunghi de culoare opusă culorii muchiilor ce pleacă din A.)

6. The non-negative real numbers a, b, c, d add up to 1. Prove the inequality $|ab - cd| \leq \frac{1}{4}$.
KöMaL, pb **Gy. 3182.**
Soluţie: Din inegalitatea mediilor rezultă $0 \leq ab,\ cd \leq \frac{1}{4}$. Concluzia este evidentă.

7. Is there any order of the numbers $1, 1, 2, 2, ..., 1998, 1998$ in which there are exactly n numbers placed between the two copies of n, for every $1 \leq n \leq 1998$?
KöMaL, pb **Gy. 3241.**, decembrie 1998, Engel, ex. 52 pag. 25, invarianţi; dată la test juniori, Gâlma 2012
Soluţia 1: Presupunem că o asemenea aşezare ar fi posibilă. Colorăm alternativ cu alb şi negru cele $2 \cdot 1998$ poziţii pe care sunt scrise numerele. Cele două copii ale unui număr impar vin pe poziţii de aceeaşi culoare, iar cele două copii ale unui număr par pe poziţii de culori diferite. Trebuie deci să avem un număr par de numere impare, ceea ce nu e cazul.
Soluţia 2: (*Laurenţiu Ploscaru*) Fie x_i prima apariţie a lui i şi y_i cea de-a doua. Atunci $\sum(x_i + y_i) = 1 + 2 + 3 + ... + 2 \cdot 1998$ =par, iar $\sum(y_i - x_i) = \sum(i + 1)$ =impar, contradicţie.

8. There are given $2n + 1$ odd positive numbers, none of which is greater than $6n$. Prove that one of these numbers divides an other one.
KöMaL, pb **Gy. 3249.**, ianuarie 1999
Soluţie: Numerele sunt de forma $3^k(2j + 1)$, cu $(2j + 1, 6) = 1$. Sunt $2n$ numere prime cu 6, deci două dintre numerele alese au acelaşi factor $2j + 1$ deci se divid unul cu altul.
(seamănă cu cea clasică din Engel)

9. A cuboid is built out of $5 \times 10 \times 20$-cm bricks without leaving any gaps between them. Prove that the same cuboid can also be built out of the same bricks with all edges of equal lengths being parallel.
KöMaL, pb **B. 4163.**, martie 2009
Soluţie: Daca am n cărămizi şi dimensiunile paralelipipedului sunt x, y, z, trebuie ca $1000n = xyz$. Fiecare latură e $M5$ deci x, y, z sunt naturale, $M5$. Cum aria fiecărei feţe a cărămizii e pară, rezultă că fiecare din produsele xy, yz, zx este par, deci cel puţin două dintre x, y, z sunt pare. Dacă x, y, sau z e $M20$ am terminat (pot pava). Rămâne cazul în care $x, y, z = M20 + 10$. Împărţim cubul în cubuleţe de muchie 5 şi le colorăm cu 4 culori, periodic în fiecare direcţie. (coloram cubuleţul (i, j, k) cu culoarea r=restul împărţirii lui $i + j + k$ la 4). Dacă x, y, z sunt $M20 + 10$ atunci pe de o parte fiecare cărămidă acoperă un număr egal de cubuleţe de culorile $1, 2, 3, 4$ (câte două), pe de altă parte numărul total de cubuleţe de culorile $1, 4$ va fi cu 2 mai mic decât cel al cubuleţelor de culorile $2, 3$. Aşadar, dacă $x, y, z = M20 + 10$ atunci cubul nu poate fi pavat.
Altă colorare: colorăm cu negru cuburile (i, j, k) cu toate coordonatele impare. Orice caramidă prinde 0 sau 2 asemenea cuburi; sunt însă un număr impar de cuburi negre.

10. Prove that if a, b, c, d are integers and $a + b + c + d = 0$ then $2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd$ is a square number.
KöMaL, pb **B. 4113.** octombrie 2008
Soluţie: Eliminând d, se arată că $2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

11. Prove that if the natural numbers a and b only differ in the order of their digits then the sum of the digits in the numbers $5a$ and $5b$ is the same.
KöMaL, pb **B. 4492.**, ianuarie 2013, preluată din Kvant
dată la proba de baraj de juniori la ŞCOALA CU CEAS în 2013

Schiţă de soluţie: Fie $a = \overline{a_1 \dots a_n}$. Înmulţesc cu 10, împart cu 2; suma cifrelor lui $5a$ este $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\right]$ + de 5 ori numărul de cifre impare ale lui a.

12. Fie ABC un triunghi neisoscel. Fie ω cercul înscris şi I centrul acestuia. Notăm cu M, N şi P punctele de contact ale cercului cu laturile BC, CA, respectiv AB. Fie J punctul de intersecţie a dreptelor MN şi IC. Dreapta PJ intersectează ω în K. Demonstraţi că semidreapta $(CI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PCK$.

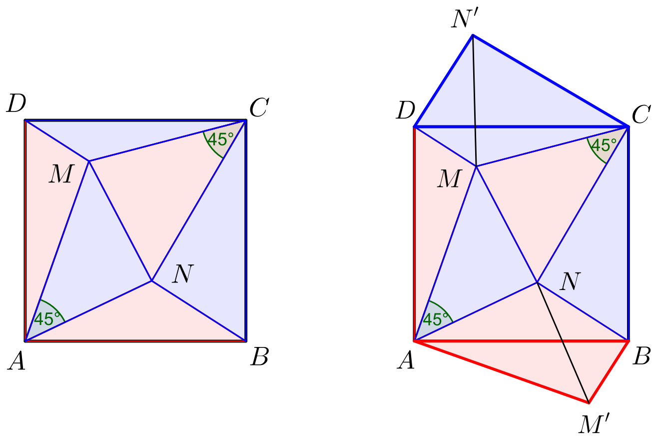
Indicaţie: Patrulaterul $CKIP$ este inscriptibil.

Test Franţa, problema 4:

http://www.animath.fr/IMG/pdf/2015-02-test-ofm-juniors-corrige.pdf

13. În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră două puncte, M şi N, astfel încât $m(\angle MAN) = m(\angle MCN) = 45°$, $M \in Int(\angle NAD)$. Suprafeţele triunghiurilor MAD, MCN şi NAB se colorează cu roşu, iar suprafeţele triunghiurilor MCD, MAN şi NCB se colorează cu albastru. Arătaţi că suprafaţa colorată cu roşu şi suprafaţa colorată cu albsatru au aceeaşi arie.

Revista Kvant, 2002



Construim, ca în figura de mai sus (cea din dreapta), în exteriorul pătratului, triunghiurile $\Delta DCN' \equiv \Delta BCN$ şi $\Delta ABM' \equiv \Delta ADM$, cu alte cuvinte „rotim" triunghiurile CNB şi AMD cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic, în jurul punctului C, respectiv în jurul punctului A.

Atunci $m(\angle MCN') = m(\angle MCD) + m(\angle DCN') = m(\angle MCD) + m(\angle BCN) = 90° - m(\angle MCN) = 45°$ şi, analog, $m(\angle NAM') = m(\angle NAM) = 45°$. Cum $CN' = CN$ şi $AM' = AM$ (din construcţie), rezultă că $\Delta MCN' \equiv \Delta MCN$ şi $\Delta NAM' \equiv \Delta NAM$ (L.U.L.). De aici rezultă că $MN' = MN = M'N$, deci şi $\Delta MDN' \equiv \Delta M'BN$ (L.L.L.).

În concluzie, avem că aria suprafeţei albastre (din interiorul pătratului) este

$$\mathcal{A}_{\Delta BCN} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta DCN'} + \mathcal{A}_{\Delta CDM} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} =$$
$$\mathcal{A}_{\Delta MCN'} + \mathcal{A}_{\Delta MDN'} + \mathcal{A}_{\Delta MAN} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta M'BN} + \mathcal{A}_{\Delta M'AN} =$$
$$\mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AM'B} = \mathcal{A}_{\Delta MCN} + \mathcal{A}_{\Delta ANB} + \mathcal{A}_{\Delta AMD},$$

adică egală cu aria suprafeţei roşii din interiorul pătratului.

14. Fie $k \in \mathbb{R}$, fixat. Să se determine mulţimea valorilor expresiei $\frac{(a+b+c)^3}{abc}$, unde a, b, c sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{b+kc}{a} = \frac{c+ka}{b} = \frac{a+kb}{c}$.

Andrei Eckstein, Concursul ,,Traian Lalescu", 2008, clasa a IX-a

Soluţie: Dacă $a+b+c \neq 0$, avem

$$\frac{b+kc}{a} = \frac{c+ka}{b} = \frac{a+kb}{c} = \frac{b+kc+c+ka+a+kb}{a+b+c} = k+1,$$

de unde $b+kc = (k+1)a \quad (*)$ şi analoagele. Dacă $k=1$ avem $b+c=2a$ şi analoagele, adică $a+b+c = 3a = 3b = 3c$, deci $a=b=c$. Dacă $k \neq 1$, scriem relaţia $(*)$ sub forma $b-a = k(a-c)$. Înmulţind cu cele două relaţii analoage, se obţine uşor că $a=b=c$, deci $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc} = 27$.

Dacă $a+b+c=0$ atunci $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc} = 0$.
Prin urmare mulţimea valorilor expresiei din enunţ este inclusă în mulţimea $\{0,\, 27\}$.
Mai trebuie văzut dacă valorile 0 şi 27 sunt într-adevăr valori pe care expresia $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$ le ia pentru o alegere a numerelor a, b, c.
Valoarea 27 se obţine de exemplu pentru $a=b=c=1$.
Valoarea 0 s-ar obţine dacă ar exista $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, cu $a+b+c=0$, care să satisfacă $\dfrac{b+kc}{a} = \dfrac{c+ka}{b} = \dfrac{a+kb}{c}$, adică $\dfrac{(k-1)c}{a} = \dfrac{(k-1)a}{b} = \dfrac{(k-1)b}{c}$.
Dacă $k \neq 1$, această relaţie conduce la $a=b=c$, deci $a=b=c=0$, ceea ce nu convine. Pentru $k=1$ expresia ia valoarea 0 pentru orice triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ cu $a+b+c=0$.
În concluzie, mulţimea valorilor pe care le ia expresia din enunţ este $\{0,\, 27\}$ dacă $k=1$ şi $\{27\}$ dacă $k \neq 1$.