A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 27 martie 2016

A doua probă de evaluare pentru OBMJ 2016

BJ5. Numerele reale a şi b satisfac sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a^3 - a^2 + a - 5 = 0, \\ b^3 - 2b^2 + 2b + 4 = 0. \end{cases}$$

Aflaţi valoarea numerică a sumei $a + b$.

Soluţie. Prin grupare de termeni avem

$$b^3 - 2b^2 + 2b + 4 = (b^3 - 3b^2 + 3b - 1) + (b^2 - 2b + 1) + (b - 1 + 5 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(b-1)^3 + (b-1)^2 + (b-1) + 5 = 0.$$

Dacă la ultima egalitate obţinută adunăm prima egalitate a sistemului din enunţ obţinem relaţiile

$$\left[a^3 + (b-1)^3\right] + \left[(b-1)^2 - a^2\right] + (a + b - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(a + b - 1) \cdot (a^2 + b^2 - ab - b + 1) = 0.$$

Dar

$$2 \cdot (a^2 + b^2 - ab - b + 1) = (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + a^2 + 1 =$$

$$(a-b)^2 + (b-1)^2 + a^2 + 1 > 0$$

pentru orice numere reale a şi b. Rezultă că $a + b = 1$.

BJ6. Determinaţi toate perechile $(x,\ y)$ de numere naturale care satisfac ecuaţia

$$5^x = y^4 + 4y + 1.$$

Soluţie. Fie $x, y \in N$. Cum 5^x este număr natural impar, atunci numărul y este par. Rezultă că $8|y^4$ şi $8|4y$, fapt care implică egalitatea

$$5^x = 8p + 1, \quad p \in N \qquad (1)$$

Dacă $x = 2k+1,\ k \in N,$ atunci

$$5^x = 5^{2k+1} = 5 \cdot 5^{2k} = 5 \cdot 25^k = 5 \cdot (8 \cdot 3 + 1)^k = 8q + 5, \quad q \in N.$$

Am obţinut contradicţie cu relaţia (1). Rezultă că nu există soluţii cu x impar.

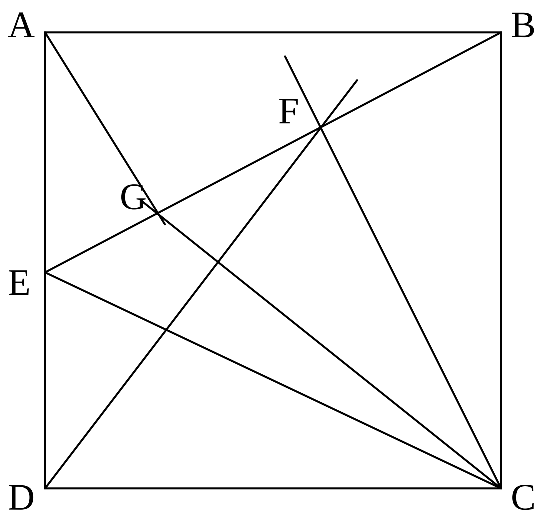
Fie $x = 2k,\ k \in N$. Atunci $y^4 + 4y + 1 = \left(5^k\right)^2$ este un pătrat perfect.
Pentru $y > 2$ numărul $y^4 + 4y + 1$ nu este pătrat perfect, deoarece

$$\left(y^2\right)^2 < y^4 + 4y + 1 < y^4 + 2y^2 + 1 = \left(y^2 + 1\right)^2.$$

Dacă $y = 2,$ atunci $5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2,$ adică perechea $(2,\ 2)$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ.
Dacă $y = 0,$ atunci $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0,$ adică perechea $(0,\ 0)$ este soluţie a ecuaţiei din enunţ. Astfel, $S = \{(0,\ 0),\ (2,\ 2)\}$.

BJ7. În pătratul $ABCD$ punctul E este mijlocul laturii AD. Punctele G şi F sunt situate pe segmentul (BE) astfel încât dreptele AG şi CF sunt perpendiculare pe dreapta BE. Demonstraţi că $DF = CG$.

Soluţie. Fie $\alpha = m(\angle GAE) = m(\angle GBA) = m(\angle ABE) = m(\angle FCB)$. Din asemănarea triunghiurilor AGE şi CFB avem $\frac{1}{2} = \frac{AE}{CB} = \frac{AG}{CF} = \frac{GE}{BF} \Rightarrow BF = 2GE,$ $CF = 2AG.$



Din congruenţa triunghiurilor BGA ţi CFB rezultă relaţiile $BF = AG$ şi $CF = BG.$ Avem egalităţile $BG = 2AG,$ $BF = AG,$ $GF = BF = AG,$ de unde rezultă că triunghiul BGC este isoscel cu $BC=GC.$

Triunghiul BEC este isoscel cu $m(\angle EBC) = m(\angle ECB) = 90^0 - \alpha$, iar patrulaterul $DEFC$ este inscriptibil cu $m(\angle DCE) = m(\angle EFD) = \alpha$. Avem $m(\angle DFC) = m(\angle DCF) = 90^0 - \alpha$, de unde rezultă că triunghiul DFC este isoscel cu $DF = DC = BC = CG.$

BJ8. Nicu joacă la calculator următorul joc. Iniţial numărul S din calculator are valoarea $S = 0$. La fiecare pas Nicu alege un număr oarecare a ($0 < a < 1$) şi îl introduce în calculator. Calculatorul, în mod arbitrar, sau adună acest număr a la numărul S sau îl scade din S şi afişează pe ecran rezultatul nou pentru S. După aceasta Nicu face următorul pas. Se ştie că printre oricare 100 de operaţii consecutive calculatorul cel puţin o dată aplică adunarea. Fie dat un număr arbitrar $M > 0$. Să se arate că există o strategie pentru Nicu care oricând îi va permite lui după un număr finit de paşi să obţină un rezulat $S > M$.

Soluţie. Evident că pentru orice număr natural nenul n avem

$$\frac{1}{2^n}+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\right)=1,$$

(adunăm consecutiv termenii) şi, prin urmare,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Strategia pentru Nicu este următoarea: la fiecare pas el trebuie să scrie consecutiv numerele: $a_1=\frac{1}{2^{100}}$, $a_2=\frac{1}{2^{99}}$, ..., $a_k=\frac{1}{2^{101-k}}$, până calculatorul nu va aplica la pasul k ($1 \le k \le 100$) prima operaţie de adunare după, eventual, câteva operaţii de scădere. Prin urmare, după aceşti k paşi numărul S s-a mărit cu $\frac{1}{2^{100}}$, dacă $k = 1$, şi tot cu aceeaşi mărime

$$-\frac{1}{2^{100}}-\frac{1}{2^{99}}-\ldots-\frac{1}{2^{101-(k-1)}}+\frac{1}{2^{101-k}}=\frac{1}{2^{101-k}}\cdot\left(-\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^{k-2}}-\ldots-\frac{1}{2}+1\right)=$$
$$\frac{1}{2^{101-k}}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{100}},$$

dacă $k > 1$.

Rezultă că după $n=[M\cdot 2^{100}]+1$ paşi, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x, se obţine un rezultat $S > M$. ■

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
BJ 5.	Obținerea factorizarea $(a+b-1)\cdot(a^2+b^2-ab-b+1)=0$	4 puncte
	Arată că $(a-b)^2+(b-1)^2+a^2+1>0,\ (\forall)\,a,b\in R$	2 puncte
	Obține $a+b=1.$	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 6.	A obținut soluțiile (0, 0) și (2, 2)	1 punct
	A argumentat că y nu poate fi impar și nu există soluții cu x impar	2 puncte
	A demonstrat că pentru $y>2$ ecuația nu are soluții	4 puncte
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 7.	Obține relațiile $\alpha=m(\angle GAE)=m(\angle GBA)=m(\angle ABE)=m(\angle FCB)$.	1 punct
	Demonstrează asemănarea triunghiurilor AGE şi CFB	1 punct
	Obține relațiile $BF=2GE,\ CF=2AG.$	1 punct
	Obține egalitățile $BF=AG$ și $CF=BG.$	1 punct
	Obţine faptul că triunghiul BGC este isoscel cu $BC=GC$.	1 punct
	Demonstrează că triunghiul BEC este isoscel și patrulaterul $DEFC$ este inscriptibil cu $m(\angle EBC)=m(\angle ECB)=90^0-\alpha$ și $m(\angle DCE)=m(\angle EFD)=\alpha$.	1 punct
	Obține că triunghiul DFC este isoscel cu $DF=DC=BC=CG.$	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 8.	Arată că $a_k>\sum_{i=1}^{k-1}a_i,\ \ 1\le k\le 100$	1 punct
	Alegerea unui șir corect (Dacă se alege un șir care verifică numai punctul 1, atunci se acordă doar 1 punct)	2 puncte
	Estimează $a_k-\sum_{i=1}^{k-1}a_i\ \ge\ r>0$	2 puncte
	Explică și argumentează strategia	2 puncte
	TOTAL	*7 puncte*