A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 februarie 2016

Prima probă de evaluare pentru OBMJ 2016

Soluţii

BJ1. Pe tablă sunt scrise numerele

$$\frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^3+1}{b^3+1},\ \frac{a^3+2}{b^3+2},\ \ldots,\ \frac{a^3+2014}{b^3+2014},\ \frac{a^3+2015}{b^3+2015},$$

unde b este număr natural nenul, iar a - număr real. Aflaţi produsul numerelor, scrise pe tablă, dacă suma lor este egală cu 2016.

Soluţie. Fie $b \in N^*$, $a \in R$, astfel încât

$$E=\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3+1}{b^3+1}+\frac{a^3+2}{b^3+2}+\ldots+\frac{a^3+2014}{b^3+2014}+\frac{a^3+2015}{b^3+2015}=2016 .$$

Expresia E conţine exact 2016 termeni, fapt care implică echivalenţele:

$$E-2016=\frac{a^3}{b^3}-1+\frac{a^3+1}{b^3+1}-1+\frac{a^3+2}{b^3+2}-1+\ldots+\frac{a^3+2014}{b^3+2014}-1+\frac{a^3+2015}{b^3+2015}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^3-b^3}{b^3}+\frac{a^3-b^3}{b^3+1}+\frac{a^3-b^3}{b^3+2}+\ldots+\frac{a^3-b^3}{b^3+2014}+\frac{a^3-b^3}{b^3+2015}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(a^3-b^3\right)\cdot\left(\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\ldots+\frac{1}{b^3+2015}\right)=0 .$$

Fie $B=\left(\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^3+1}+\frac{1}{b^3+1}+\ldots+\frac{1}{b^3+2015}\right)$. Cum $b \in N^* \Rightarrow B>0$. Egalitatea $E=2016$ implică relaţia $a^3-b^3=0 \Leftrightarrow a^3=b^3$. Astfel, toate numerele, scrise pe tablă, sunt egale cu 1 şi produsul lor este egal cu 1.

BJ2. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac egalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6.$$

Aflaţi cea mai mare valoare numerică posibilă a sumei $a + b + c$.

Soluţie. Din identitatea

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2 \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca\right)$$

şi egalitatea din enunţ rezultă relaţia

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 12.$$

Pentru numerele nenegative x, y, z este justă inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratica ale acestor numere

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

egalitatea având loc pentru $x = y = z$.

Punem $x = a+b,\ y = b+c,\ z = c+a$ şi obţinem

$$\frac{a+b+b+c+c+a}{3} \le \sqrt{\frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2 \cdot (a+b+c)}{3} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad a+b+c \le 3.$$

Egalităţile $a+b = b+c = c+a$ implică $a = b = c.$ Pentru $a = b = c = 1$ are loc egalitatea din enunţ şi $a+b+c = 3$. Rezultă că cea mai mare valoare numerică posibilă a sumei $a+b+c$ este egală cu 3.

BJ3. Fie triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle B) = m(\angle C) = 36^o$. Punctul M este situat în interiorul triunghiului ABC astfel, încât $m(\angle MBC) = 24^o$, $m(\angle MCB) = 30^o$, iar dreptele AM şi BC se intersectează în punctul N. Aflaţi măsura unghiului ANC.

Soluţie. Fie $D \in (BC),\ BD = DC,\ \Rightarrow\ AD \perp BC,\ CM \cap AD = \{E\},\ BM \cap AC = \{F\}$.

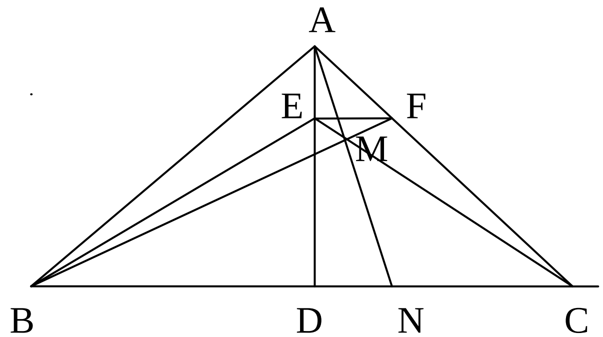

Figura 1

Unim punctele E şi F (vezi figura 1). Cum $m(\angle BCF) = 36^o$, iar $m(\angle CBF) = 24^o$, rezultă că $m(\angle AFB) = 60^o = m(\angle AFM)$. Triunghiul BEC este isoscel cu $m(\angle CBE) = m(\angle BCE) = 30^o$, iar $ED \perp BC$. Rezultă că $m(\angle DEC) = 60^o$, iar $m(\angle AEC) = m(\angle AEM) = 120^o$. Din $m(\angle AFM) + m(\angle AEM) = 60^o + 120^0 = 180^0$ rezultă că patrulaterul $AEMF$ este inscriptibil.

Din $m(\angle B) = m(\angle C) = 36^o$, $m(\angle MBC) = 24^o$ şi $m(\angle CBE) = m(\angle BCE) = 30^o$ rezultă că $m(\angle ABE) = m(\angle FBE) = m(\angle FCE) = 6^o$. Ultimile egalităţi implică faptul că patrulaterul $BEFC$ este inscriptibil.

Avem $m(\angle EFB) = m(\angle EFM) = m(\angle EAM) = m(\angle ECB) = m(\angle MCB) = 30^o$. Rezultă că $m(\angle DAN) = 30^o$, $m(\angle AND) = 60^0$, iar $m(\angle ANC) = 120^o$.

BJ4. Găsiţi toate perechile $(x,\ y)$ de numere întregi care satisfac ecuaţia

$$x\cdot y=3\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right).$$

Soluţie. Fie S mulţimea soluţiilor întregi a ecuaţiei din enunţ. Cum $x\in Z,\ \ y\in Z$ şi $(0,\ 0)\notin S$, rezultă că $x^2+y^2\geq 1$, de unde avem $xy\geq 0$. Observăm că ecuaţia este simetrică, adică dacă $(x_0,\ y_0)\in S$, atunci şi $(-x_0,\ -y_0)\in S$. Vom găsi soluțiile naturale ale ecuației din enunț/

Scriem ecuaţia din enunţ în forma $xy+3=3\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ şi ridicăm ambele părţi ale ultimeiecuaţii la pătrat. Avem $(xy+3)^2=9\cdot\left(x^2+y^2\right)$. Notăm $xy=3k,\ \ k\in N$. Obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} xy=3k \\ x^2+y^2=(k+1)^2 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x+y)^2=k^2+8k+1 \\ x^2+y^2=(k+1)^2 \end{cases}.$$

Cum $(x+y)^2$ este pătrat perfect, rezultă că $k^2+8k+1=m^2$, unde $m\in N$. Avem ecuaţia $(k+4)^2-m^2=15 \Leftrightarrow (k+m+4)\cdot(k-m+4)=15$. Cum $k+m+4\in N^*$, rezultă că obţinem doar soluţiile $(k,\ m)\in\{\ (4,7),\ (0,\ 1)\ \}$. Pentru $k=4,\ m=7$ obţinem soluţiile $(x,\ y)\in\left\{\ (4,3),\ (3,\ 4),\ (-4,\ -3),\ (-3,-4)\right\}$, dacă $k=0,\ m=1$ avem $(x,\ y)\in\left\{\ (0,1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (-1,0)\right\}$.

Astfel, $S=\left\{\ (4,3),\ (3,\ 4),\ (-4,\ -3),\ (-3,-4),\ (0,1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 0),\ (-1,0)\ \right\}$.

Barem de corectare

NOTĂ: *Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.*

Problema	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
BJ 1.	Dacă $t_i=\dfrac{a^3+i}{b^3+i}, i=0,1,...,2015$, scrie diferenţa $E-2016=(t_0-1)+(t_1-1)+...+(t_{2015}-1)=0$	1 punct
	Reprezintă $t_i-1=\dfrac{a^3-b^3}{b^3+i},\ \ i=0,1,...,2015$	2 puncte
	Factorizează $E-2016=(a^3-b^3)\cdot B$, unde $B=\sum\limits_{i=0}^{2015}\dfrac{1}{b^3+i}$.	1 punct

	Argumentează că $B > 0$.	1 punct
	$E = 2016 \Leftrightarrow a^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow t_i = 1$	1 punct
	Concluzia că toate numerele scrise pe tablă sunt egale cu 1 şi produsul lor este egal cu 1.	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 2.	Scrie identitatea $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2\cdot(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$	1 punct
	Obţine egalitatea $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 12$	1 punct
	Scrie inegalitatea $\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ MA-MP	1 punct
	Aplică MA-MP pentru $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$	1 punct
	Obţine estimaţia corectă $a+b+c \le 3$.	1 punct
	Arată $a+b = b+c = c+a \Leftrightarrow a = b = c$.	1 punct
	Pentru $a = b = c = 1$ are loc egalitatea din enunţ şi $a+b+c = 3$.	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 3.	Dacă $AD \perp BC$ şi $CM \cap AD = \{E\}$, argumentează că triunghiul BEC este isoscel	1 punct
	Obţine $m(\angle AFB) = 60^o = m(\angle AFM)$.	1 punct
	Obţine $m(\angle AEC) = m(\angle AEM) = 120^o$	1 punct
	Arată că patrulaterul $AEMF$ este inscriptibil	1 punct
	Obţine $m(\angle ABE) = m(\angle FBE) = m(\angle FCE) = 6^o$.	1 punct
	Arată că patrulaterul $DEFC$ este inscriptibil	1 punct
	Scrie concluzia $m(\angle ANC) = 120^o$.	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*
BJ 4.	Arată că $xy \in N$	1 punct
	Obţine $(xy+3)^2 = 9\cdot(x^2 + y^2)$.	1 punct
	Aplică $xy = 3k$, $k \in N$ şi obţine $(x+y)^2 = k^2 + 8k + 1$	1 punct
	Obţine $(k+4)^2 - m^2 = 15 \Leftrightarrow (k+m+4)\cdot(k-m+4) = 15$	1 punct
	Obţine $(k, m) \in \{ (4, 7), (0, 1) \}$	1 punct
	Obţine $(x, y) \in \{ (4, 3), (3, 4), (-4, -3), (-3, -4) \}$	1 punct
	Obţine $(x, y) \in \{ (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0) \}$	1 punct
	TOTAL	*7 puncte*