Al doilea baraj de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 25 aprilie 2013

Problema 1. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} + \frac{b^2(c+1)}{bc+b+c} + \frac{c^2(a+1)}{ca+c+a} \geq 2.$$

Mathematical Excalibur P322/Vol.14, no.2

Soluţia 1. Observăm că

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} = a - \frac{ab}{ab+a+b} \geq a - \frac{ab}{ab+2\sqrt{ab}} = a - 1 + \frac{2}{\sqrt{ab}+2}.$$

Sumând, obţinem

$$\sum_{cyc} \frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} \geq 2\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{ab}+2} \geq 2 \cdot \frac{(1+1+1)^2}{6+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}} \geq \frac{18}{6+\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}} = 2.$$

Egalitatea se obţine când $a = b = c = 1$.

Soluţia 2. Avem succesiv

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} &= \sum_{cyc} \frac{a^2}{\frac{ab+a+b}{b+1}} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+1-\frac{1}{b+1}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)} = \\ &= \frac{9}{6-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)} \geq \frac{9}{6-\frac{(1+1+1)^2}{a+1+b+1+c+1}} = \frac{9}{6-\frac{3}{2}} = 2.\end{aligned}$$

Egalitatea are loc pentru $a = b = c = 1$.

Problema 2. Arătaţi că suma dintre un număr natural n şi răsturnatul său este divizibilă cu 81 dacă şi numai dacă suma cifrelor lui n este divizibilă cu 81.

Andrei Eckstein

Soluţie. Fie $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ şi $r(n) = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{k-1} a_k}$ răsturnatul său. Atunci

$$n + r(n) = \sum_{j=0}^{k} (a_j + a_{k-j}) \cdot 10^j = \sum_{j=0}^{k} a_j (10^j + 10^{k-j}).$$

Folosim acum că $10^i + 10^{j+1} \equiv 10^j + 10^{i+1} \pmod{81}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, care se demonstrează uşor. Deducem că există r astfel încât $10^j + 10^{k-j} \equiv r$, $\forall j = \overline{0, k}$.

Atunci $n + r(n) \equiv r \sum\limits_{j=0}^{k} a_j$. Concluzia rezultă ţinând cont că $(r, 81) = 1$.

Problema 3. Se colorează toate submulţimile cu 3 elemente ale unei mulţimi cu 7 elemente astfel încât oricare două submulţimi disjuncte să nu aibă aceeaşi culoare. Aflaţi numărul minim de culori necesare.

KöMaL B4233

Soluţia 1. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, atunci două culori nu ajung pentru că $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{6, 7, 1\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{1, 2, 3\}$ ar trebui colorate alternativ cu cele două culori.

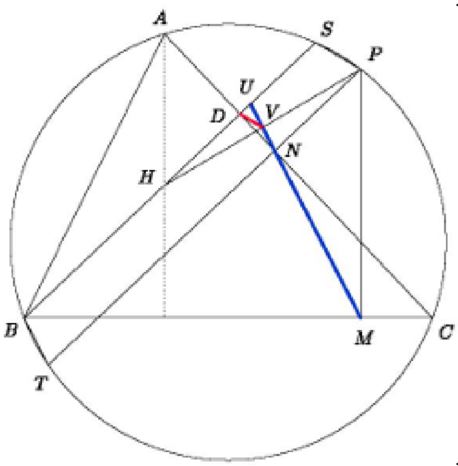
Cu 3 culori putem colora cu una dintre culori toate tripletele care îl conţin pe 7, cu altă culoare toate submulţimile care nu-l conţin pe 7 şi au suma elementelor pară şi cu a treia culoare pe celelalte.

Soluţia 2. *(Dan Schwarz)* Vom arăta că numărul minim de culori este 3. Presupunând că o colorare cu două culori ar fi posibilă, fie U mulţimea tripletelor colorate cu prima culoare şi V mulţimea tripletelor colorate cu culoarea a doua. Pentru fiecare $X \in U$ există 4 submulţimi ale lui $A \setminus X$ care trebuie să fie în V. Dacă reprezentăm mulţimea tripletelor ca pe un graf în care unim două triplete dacă ele sunt disjuncte, atunci fiecare element din U este unit cu 4 elemente din V şi invers. Atunci numărul total de muchii, adică de perechi de triplete disjuncte este 4 $\operatorname{card} U = 4 \operatorname{card} V$, de unde $\operatorname{card} U = \operatorname{card} V$. Dar atunci $\operatorname{card} U \cup V$ ar trebui să fie par, ori el este $\binom{7}{3} = 35$, adică impar, contradicţie.

O colorare cu 3 culori poate fi găsită astfel: alegem două elemente $x, y \in A$. Tripletele care nu conţin nici x nici y le colorăm cu culoarea 1, tripletele care îl conţin pe x dar nu şi pe y cu culoarea 2, iar tripletele care îl conţin pe y cu culoarea 3.

Problema 4. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC cu ortocentrul H. Punctul P este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că mijlocul segmentului $[HP]$ este situat pe dreapta lui Simson asociată punctului P în raport cu triunghiul ABC.

[∗ ∗ ∗]



Soluţie. Considerăm punctele M şi N, proiecţiile punctului P pe dreptele AC, respectiv BC. Dreapta MN este dreapta lui Simson asociată punctului P în raport cu triunghiul ABC. Fie Q simetricul punctului P în raport cu punctul N. Punctul D este diametral opus punctului A, iar S este proiecţia punctului D pe dreapta PQ. Mai notăm: $\{R\} = PQ \cap C\,(O; OA)$ şi, în sfârşit, $\{T\} = MN \cap PH$. Deoarece $\angle DCA = \angle PNA = 90°$, rezultă că $DC \parallel PR$ şi, cum punctele P, D, C şi R sunt conciclice, deducem că patrulaterul $PDCR$ este trapez isoscel. Ca urmare, $NR = SP$. Deoarece $SN = DC$, rezultă că $DC = SN = RQ$. Se cunoaşte că patrulaterul $BDCH$ este paralelogram, prin urmare şi patrulaterul $BRQH$ este paralelogram. Cum patrulaterele $MNCP$ şi $BRCP$ sunt inscriptibile, obţinem relaţiile $\angle MNP \equiv \angle MCP$, respectiv $\angle BRP \equiv \angle BCP$. Cele două relaţii se traduc prin faptul că $MN \parallel BR$ şi, cum $BR \parallel HQ$, obţinem $MN \parallel HQ$. În triunghiul PHQ, punctul N este mijlocul laturii $[PQ]$ şi $MN \parallel HQ$, deci punctul T este mijlocul laturii $[HP]$.