A 58-a Olimpiadă de matematică a Republicii Moldova

Barajul I de selecţie pentru OBMJ, 3 martie 2014

2014/BJ1. Să se demonstreze că

$$\frac{2}{2013+1}+\frac{2^2}{2013^{2^1}+1}+\frac{2^3}{2013^{2^2}+1}+...+\frac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}}+1}<\frac{1}{1006}.$$

2014/BJ2. Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y) care satisfac ecuaţia

$$(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x=y^2-5y+62.$$

2014/BJ3. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle BAC = 90°$. Punctele D şi E, situate pe catetele (AC) şi respectiv, (AB), sunt picioarele bisectoarelor interioare duse din vîrfurile B şi C, respectiv. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă $BD \cdot CE = a^2\sqrt{2}$, să se afle aria triunghiului BIC (în funcţie de a).

2014/BJ4. O mulţime A conţine 956 numere naturale între 1 şi 2014, inclusiv. Să se demonstreze că în mulţimea A există două numere a şi b astfel încît $a+b$ se divide cu 19.

A 58-a Olimpiadă de matematică a Republicii Moldova

Barajul II de selecţie pentru OBMJ, 29 martie 2014

2014/BJ5. Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul

$$A=\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+5}{4}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+n^2+3n+3$$

este pătrat perfect. ($[x]$ denotă partea întreagă a numărului real x.)

2014/BJ6 Numerele reale nenegative x, y, z satisfac egalitatea $x+y+z=1$. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a expresiei $E(x,y,z)=(x+2y+3z)(6x+3y+2z)$.

2014/BJ7. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel cu $\angle A = 90°$. Pe semidreapta $(AC$ se iau punctele distincte E şi F astfel încît $\angle ABE = 15°$ şi $CE = CF$. Să se determine $\angle CBF$.

2014/BJ8. Profesorul a scris pe tablă un număr natural nenul. Profesorul le explică elevilor că ei pot şterge numărul scris pe tablă şi pot scrie în locul lui un număr natural nou, ori de cîte ori doresc, aplicînd de fiecare dată una dintre următoarele reguli:
1) în locul numărului curent n se scrie $3n+13$

2) în locul numărului curent n se scrie numărul $\sqrt{n}$, în cazul cînd n este pătrat perfect.

a) Dacă iniţial pe tablă a fost scris numărul 256, este oare posibil ca după un număr finit de paşi să se obţină pe tablă numărul 55?

b) Dacă iniţial pe tablă a fost scris numărul 55, este oare posibil ca după un număr finit de paşi să se obţină pe tablă numărul 256?

Soluţii

2014/BJ1. Pentru $i = 1, 2, ..., 2014$ avem

$$\frac{2^i}{2013^{2^{i-1}} - 1} - \frac{2^i}{2013^{2^{i-1}} + 1} = \frac{2 \cdot 2^i}{(2013^{2^{i-1}})^2 - 1} = \frac{2^{i+1}}{2013^{2^i} - 1} \Rightarrow$$

Adunînd aceste relaţii pentru $i = 1, 2, ..., 2014$, rezultă că suma din enunţ este

$$\left(\frac{2}{2013 - 1} - \frac{2^2}{2013^2 - 1}\right) + \left(\frac{2^2}{2013^2 - 1} - \frac{2^3}{2013^{2^2} - 1}\right) + ... +$$

$$+ \left(\frac{2^{2014}}{2013^{2^{2013}} - 1} - \frac{2^{2015}}{2013^{2^{2014}} - 1}\right) = \frac{2}{2013 - 1} - \frac{2^{2015}}{2013^{2^{2014}} - 1} < \frac{2}{2012} = \frac{1}{1006}.$$

2014/BJ2. Scriem ecuaţia din enunţ sub forma

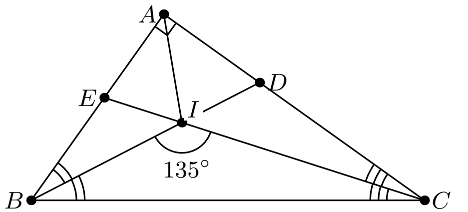
$$(y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x = (y-2)(y-3) + 56 \Leftrightarrow$$

$$(y-2)[x^2 + (y-4)x - (y-3)] = 56 \Leftrightarrow (y-2)(x-1)(x+y-3) = 56.$$

Cum $y-2+x-1 = x+y-3$ şi $56 = 1 \cdot 7 \cdot 8 = 7 \cdot 1 \cdot 8 = (-8) \cdot 1 \cdot (-7) = 1 \cdot (-8) \cdot (-7) = (-8) \cdot 7 \cdot (-1) = 7 \cdot (-8) \cdot (-1)$, obţinem următoarele şase soluţii ale ecuaţii din enunţ:

$$(x, y) \in \{(2, 9), (8, 3), (-7, 3), (2, -6), (-7, 9), (8, -6)\}.$$

2014/BJ3.



BJ3

Fie $AB = c, BC = a, CA = b$. Conform teoremei bisectoarei avem $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{DA}{c} = \frac{DC}{a} = \frac{DA+DC}{a+c} = \frac{b}{a+c} \Rightarrow DA = \frac{bc}{c+a}$. Cum AI este bisectoarea $\angle BAD$, avem $\frac{BI}{DI} = \frac{AB}{AD} = \frac{c}{bcc+a} = \frac{c+a}{b} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{c+a}{a+b+c}$. În mod analog, obţinem $\frac{CI}{CE} = \frac{a+b}{a+b+c}$. Astfel, $\frac{BI}{BD} \cdot \frac{CI}{CE} = \frac{(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^2} =$

$$= \frac{a^2 + ac + ab + bc}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = \frac{a^2 + ac + ab + bc}{2(a^2 + ac + ab + bc)} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Cum $\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 135°$, aria triunghiului BIC este

$$[BIC] = \frac{1}{2}BI \cdot CI \cdot \sin\angle BIC \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BD \cdot CE \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

2014/BJ4. Considerăm partiţia mulţimii $M = \{1, 2, ..., 2014\}$ în clasele $V_i = \{19k + i \mid 0 \leq k \leq 105\},\ i = 1, 2, ..., 19$. Avem $|V_i| = 106$ şi $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$. Presupunem, prin absurd, că nu există $a, b \in A$ astfel încît $a + b$ să fie divizibil prin 19. Cum suma a două numere din V_{19} se divide cu 19, rezultă că în A poate fi inclus doar un singur număr din V_{19}. În continuare, pentru $k = 1, 2, ..., 9$, dacă $c \in V_k$ şi $d \in V_{19-k}$ atunci $c + d$ se divide cu 19. Rezultă că din $V_k \cup V_{19-k}$ putem include în A cel mult toate elementele din V_k, sau toate elementele din V_{19-k}, adică cel mult $|V_k| = |V_{19-k}| = 106$ elemente din $V_k \cap V_{19-k}$. Deci, A poate conţine cel mult $1 + 9 \cdot 106 = 955$ elemente din mulţimea M, contradicţie.

2014/BJ5. Fie $B = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]$. Dacă $n = 4k$ atunci $B = k + k + 1 + 2k = 4k + 1 = n + 1$. Dacă $n = 4k + 1$, atunci $B = k + 1 + k + 1 + 2k = 4k + 2 = n + 1$. În mod analog, dacă $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$, se arată că $B = n + 1$. Atunci $B = n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = n + 1 + n^2 + 3n + 3 = (n + 2)^2$, deci A este pătrat perfect.

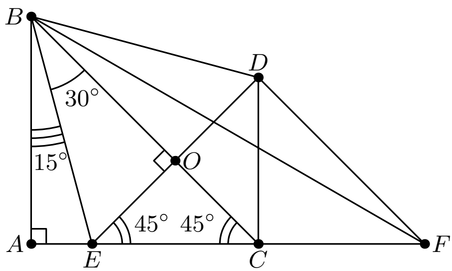
2014/BJ6. Aplicînd inegalitatea $ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2$ (cu egalitate pentru $a = b$), şi folosind relaţia $x + y + z = 1$, avem

$$2E = (2x + 4y + 6z)(6x + 3y + 2z) \leq \frac{1}{4}(8x + 7y + 8z)^2 = \frac{1}{4}(8 - y)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot 8^2 = 16.$$

Rezultă că $E \leq 8$. Egalitatea are loc cînd

$$\begin{cases} y & = 0 \\ 2x + 4y + 6z & = 6x + 3y + 2z \\ x + y + z & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ x + z & = 1 \\ x & = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

2014/BJ7.



BJ7

Fie D simetricul lui E faţă de dreapta BC, iar $BC \cap DE = \{O\}$. Atunci $BD = BE$. Cum $\angle CBD = \angle CBE = 30°$, rezultă că triunghiul BED este echilateral. Avem $\angle ECO = 45°$ şi cum $CD = CE = CF$, obţinem că $\triangle EDF$ este dreptunghic isoscel, iar $\triangle BDF$ este isoscel cu $\angle BDF = 150°$. Atunci $DF \parallel BC$ şi $\angle CBF = \angle DFB = 15°$.

2014/BJ8. (a) Se poate: $256 \mapsto \sqrt{256} = 16 \mapsto 3 \cdot 16 + 3 = 61 \mapsto 3 \cdot 61 + 3 = 196 \mapsto 14 \mapsto 3 \cdot 14 + 3 = 55$.
(b) Nu este posibil. Într-adevăr, deoarece orice pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k+1$, rezultă că nu putem aplica regula (2) ($n \mapsto \sqrt{n}$) la numere de forma $n = 4k+2$ sau $n = 4k+3$. Dacă $n = 4k+2$, atunci regula (1) ne oferă numărul $3(4k+2)+13 = 4(3k+4)+3$, iar dacă $n = 4k+3$, atunci regula (1) produce numărul $3(4k+3)+13 = 4(3k+5)+2$. Cum $55 = 4 \cdot 13 + 3$, rezultă că din el pot fi obţinute doar numere de forma $4k+2$ sau $4k+3$, şi nicidecum numărul 256.