## Soluţii juniori

### Problema 1

Se consideră suma $S = x_1x_2 + x_3x_4 + ... + x_{2015}x_{2016}$, unde $x_1, x_2, ..., x_{2016} \in \left\{\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2}\right\}$.
Este posibil să avem $S = 2016$?

Cristian Lazăr

**Soluţie.**
Răspuns: Da.

Termenii sumei sunt de forma $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=1$, $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}$ sau $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$.

Să spunem că sunt $a$ termeni de primul tip, $b$ termeni de al doilea tip şi $c$ de al treilea tip .
Avem $a+b+c=1008$ şi $a+b\left(5+2\sqrt{6}\right)+c\left(5-2\sqrt{6}\right)=2016$, echivalent cu

$a+5b+5c-2016=\sqrt{6}(2c-2b)$. De aici deducem că $b=c$ .
Obţinem $a+2b=1008$ şi $a+10b=2016$ . Prin urmare $a=756$ şi $b=c=126$.

### Problema 2

Determinați numerele naturale $n>1$ care au proprietatea că, pentru orice divizor $d>1$ al lui *n*, numerele $d^2+d+1$ și $d^2-d+1$ sunt prime.

Lucian Petrescu

**Soluţie.**
Răspuns: $n\in\{2;3;6\}$.

Arătăm mai întâi că *n* este liber de pătrate. Dacă prin absurd ar exista $d>1$, astfel încât $d \mid n$ și $d^2 \mid n$, atunci conform ipotezei ar rezulta că numărul $\left(d^2\right)^2+d^2+1=d^4+d^2+1$ este prim.

Dar $d^4+d^2+1=\left(d^2+d+1\right)\left(\underbrace{d^2-d+1}_{\geq 3}\right)$, contradicţie.

Deci $n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_s$, cu $s\in\mathbb{N}^*$ și $p_1<p_2<\ldots<p_s$ numere prime.

Fie $p\geq 5$ un număr prim, divizor al lui $n$. Atunci $p\equiv 1 \pmod 6$ sau $p\equiv 5 \pmod 6$ .

Dacă $p\equiv 1 \pmod 6$ obținem că numărul $p^2+p+1\equiv 3\pmod 6$ (și $p^2+p+1>3$) este compus, fals. Dacă $p\equiv 5 \pmod 6$ rezultă că numărul $p^2-p+1\equiv 3\pmod 6$ (și $p^2-p+1>3$) este compus, fals.

Așadar, *n* nu are factori primi $p\geq 5$ de unde rezultă că $p_i\in\{2;3\}$, adică $n\in\{2;3;6\}$, toate cele trei valori ale lui *n* verificând ipoteza problemei.

**Problema 3**

Se consideră un triunghi *ABC*, cu $AB < AC$, în care punctul *I* este intersecţia bisectoarelor şi punctul *M* este mijlocul laturii [*BC*]. Dacă $IA = IM$, determinaţi cea mai mică măsură posibilă a unghiului $AIM$.

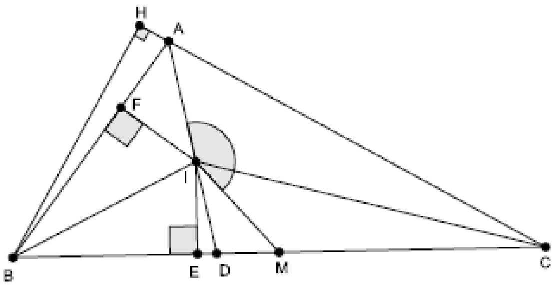
**[∗∗∗]**

**Soluţie.**

Răspuns: $150°$.

Fie $\{D\} = AI \cap BC$. Deoarece $AB < AC$, atunci $D \in (BM)$ şi $m(ACB) < m(ABC)$.

Avem $m(IDB) = m(DAC) + m(ACB) < m(DAB) + m(ABD) = m(ADC)$, deci unghiul $IDB$ este ascuţit.




Fie *F* şi *E* proiecţiile punctului *I* pe dreptele *AB*, respectiv *BC*.

Deducem că $E \in (BD) \subset BM$.

Cum $\Delta IBF \equiv \Delta IBE$ (CU) şi $\Delta IFA \equiv \Delta IEM$ (IC), rezultă că $BA = BM = \dfrac{BC}{2}$ şi $\Delta IBA \equiv \Delta IBM$.

Avem $m(MID) = m(IDB) - m(IMB) = m(DAC) + m(ACD) - m(IAB) = m(ACD)$.

Ca urmare, $m(AIM) = 180^\circ - m(ACB)$ .(1)

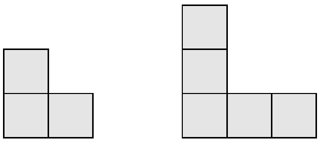
Fie *H* proiecţia punctului *B* pe dreapta *AC*. Rezultă că $BH \le AB = \dfrac{BC}{2}$.

Deducem că $m(ACB) \le 30°$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $m(AIM) \ge 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

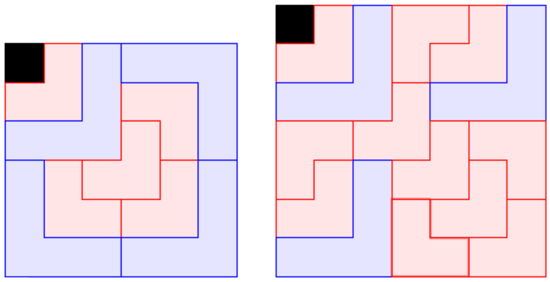
**Problema 4**

Un pătrat unitate este îndepărtat din colţul unui pătrat $n \times n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Demonstraţi că suprafaţa rămasă poate fi pavată cu dale formate din 3 sau 5 pătrate unitate de forma celor din figurile de mai jos:

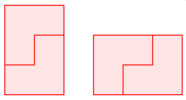


[***]

**Soluţie.**
Vom numi un pătrat descris de enunţ „ pătrat ciobit”.
Mai întâi constatăm că, pentru $m \in \{2,3,4,5,6,7\}$ orice pătrat ciobit $m \times m$ poate fi pavat ca mai jos.



În plus, dacă $p \in \mathbb{N}^*$, orice dreptunghi $6p \times m$, cu $m \in \{2,3,4,5,6,7\}$, precum şi pătratul $6p \times 6p$ pot fi pavate cu dreptunghiuri de tipul



Pentru oricare $n$, $n \geq 8$, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = 6k + m$, unde $m \in \{2,3,4,5,6,7\}$.
Prin urmare, orice pătrat ciobit $n \times n$ se va obţine din pătratul ciobit $m \times m$, $m \in \{2,3,4,5,6,7\}$, care se bordează cu două dreptunghiuri $6k \times m$ şi un pătrat $6k \times 6k$ astfel: