Lista scurtă JBMO 2000
(Enunţurile primelor 11 probleme sunt preluate din Gazeta Matematică)

1. Găsiţi numerele care se scriu $\overline{abcd}$ în baza 10 şi $\overline{dcba}$ în baza 7.

2. Găsiţi toate perechile (m,n) de numere întregi astfel încât numerele $A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 2$, $B = 2n^2 + 3mn + m^2 + 2$, $C = 3n^2 + mn + 2m^2 + 1$ admit un divizor comun diferit de 1.

3. Găsiţi toate numerele de patru cifre care, descompuse în factori primi, au proprietatea că suma bazelor este egală cu suma exponenţilor.

4. Găsiţi toate perechile (m,n) de numere întregi astfel încât numerele $A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 3n$, $B = 2n^2 + 3mn + m^2$, $C = 3n^2 + mn + 2m^2$ sunt trei numere consecutive într-o anumită ordine.

5. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$.

6. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = [a\sqrt{2}] + [b\sqrt{3}]$.

7. Numerele naturale x_n (cu $n \in \mathbb{N}$) verifică pentru orice n condiţiile

$$\text{(A) } x_{2n+1} = 4x_n + 2n + 2, \qquad \text{(B) } x_{3n+2} = 3x_{n+1} + 6x_n.$$

Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este verificată condiţia

$$\text{(C) } x_{3n+1} = x_{n+2} - 2x_{n+1} + 10x_n.$$

8. Fie ABC un triunghi. Găsiţi toate posibilităţile de a alege un punct X pe laturile triunghiului ABC şi un punct Y în interiorul triunghiului ABC astfel încât patru segmente din familia XY, AX, AY, BX, BY, CX, CY, care nu au puncte interioare comune, să împartă triunghiul ABC în patru triunghiuri de aceeaşi arie.

9. Fie ABC un triunghi. Găsiţi toate segmentele $[XY]$ interioare triunghiului, astfel încât $[XY]$ şi cinci dintre segmentele XA, XB, XC, YA, YB, YC să împartă aria tringhiului ABC în cinci regiuni cu arii egale. Arătaţi că segmentele găsite au un punct comun.

10. Fie ABC un triunghi. Găsiţi toate triunghiurile XYZ interioare triunghiului ABC astfel încât laturile XY, YZ, ZX şi şase dintre segmentele XA, XB, XC, YA, YB, YC, ZA, ZB, ZC (fără puncte interioare comune) să împartă aria tringhiului ABC în şapte regiuni cu arii egale.

11. Fie ABC un triunghi şi a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB. Considerăm un alt triunghi DEF cu lungimile laturilor $EF = \sqrt{au}$, $FD = \sqrt{bu}$, $DE = \sqrt{cu}$.

Notăm cu $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle F$ măsurile unghiurilor acestor tringhiuri. Presupunând că $\sphericalangle A > \sphericalangle B > \sphericalangle C$, arătaţi că $\sphericalangle A > \sphericalangle D > \sphericalangle E > \sphericalangle F > \sphericalangle C$.

12. Demonstraţi că există cel puţin 666 numere naturale compuse care au 2006 cifre, una din ele fiind 7, iar celelalte fiind egale cu 1.

13. Determinaţi toate cuburile perfecte, nedivizibile cu 10, care au proprietatea că numărul obţinut prin ştergerea ultimelor trei cifre este tot un cub perfect.

14. Determinaţi cel mai mare număr natural x astfel încât 23^{6+x} divide $2000!$.

15. Determinaţi toate numerele naturale nenule a, b pentru care a^4+4b^4 este număr prim.

16. Determinaţi toate tripletele (x, y, z) de numere naturale nenule astfel încât $xy + yz + zx - xyz = 2$.

17. Demonstraţi că nu există numere întregi x, y, z cu proprietatea $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 2000$.

18. Demonstraţi că $\sqrt{(1^k + 2^k)(1^k + 2^k + 3^k)\ldots(1^k + 2^k + \ldots + n^k)} \geq 1^k + 2^k + \ldots + n^k - \dfrac{2^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + (n-1) \cdot n^{k-1}}{n}$ pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geq 2$.

19. Fie m şi n numere naturale nenule, $m \leq 2000$, şi $k = 3 - \dfrac{m}{n}$. Aflaţi cea mai mică valoare pozitivă a lui k.

20. Fie x, y, a, b numere reale pozitive astfel încât $x \neq y$, $x \neq 2y$, $y \neq 2x$, $a \neq 3b$ şi $\dfrac{2x - y}{2y - x} = \dfrac{a + 3b}{a - 3b}$. Demonstraţi că $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \geq 1$.

21. Determinaţi toate tripletele (x, y, z) de numere reale astfel încât

$$2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + yz + zx.$$

22. Toate unghiurile hexagonului $ABCDEF$ sunt egale. Arătaţi că $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

23. Fie $ABCD$ un patrulater în care $m(\angle DAB) = 60°$, $m(\angle ABC) = 90°$ şi $m(\angle BCD) = 120°$. Diagonalele AC şi BD se intersectează în M. Dacă $MB = 1$ şi $MD = 2$, aflaţi aria patrulaterului $ABCD$.

24. Punctul P este în interiorul unui triunghi echilateral de latură 10 astfel încât distanţele de la P la două dintre laturi sunt 1 şi 3. Aflaţi distanţa de la P la cea de-a treia latură.