Rezolvarea unor probleme de geometrie prin reducerea la demonstrarea unei afirmaţii reciproce

MARIUS MÎINEA[1]

Abstract

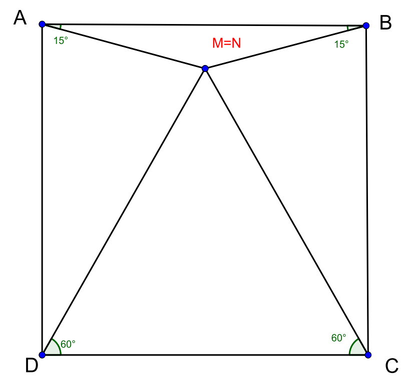
Articolul ce urmeaza prezintă o metodă utilă in rezolvarea unor probleme de geometrie demonstrând unele reciproce ale acestora si folosind în final considerente de unicitate bazate pe concurenţă coliniaritate sau paralelism.

Problema 1

În interiorul pătratului ABCD se consideră un punct M astfel încât $m(\angle MAB) = m(\angle MBA) = 15°$. *Să se afle măsura unghiului* $\angle CMD$.

* * *

Solutie:



Fie N in interiorul pătratului ABCD astfel încât triunghiul NCD este echilateral.Rezultă că triunghiurile AND şi BNC sunt isoscele cu unghiurile de la bază de 75°de unde $m(\angle NAB) = (\angle NBA) = 15°$. Aşadar A,M,N sunt coliniare dar şi B,M,N.De aici M=N şi problema este rezolvată.

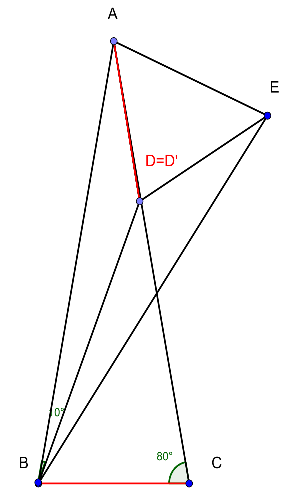
Problema 2

În triunghiul ABC cu AB=AC şi $m(\angle A) = 20°$, *fie D pe latura (AC) astfel încât* $AD = BC$.*Să se arate că* $m(\angle ABD) = 10°$.

Concursul Marian Tarina,2010

Solutie:
Fie D' pe latura (AC) astfel încât $m(\angle ABD') = 10°$şi E simetricul lui A faţă de BD'.Atunci $m(\angle ABE) = 20°$şi $\triangle AD'B \equiv \triangle AD'E$ deci triunghiul AD'E este echilateral.Rezultă că $\triangle ABE \equiv \triangle BAC$(L.U.L) deci $AD' = AE = BC = AD$ şi D=D'.

[1]Profesor,Colegiul Naţional ,,Vladimir Streinu", Găeşti



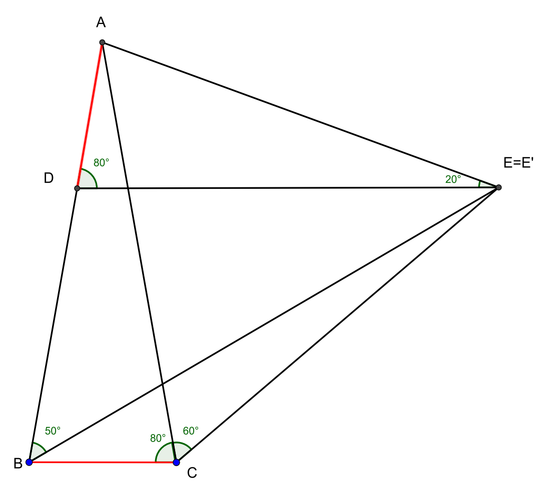
Problema 3

Se consideră triunghiul isoscel ABC având AB=AC si $m(\angle A) = 20°$*. Fie* $D \in (AB)$ *astfel încât AD=BC,iar E de aceeaşi parte a lui AB ca şi C astfel încât* $DE \parallel BC$*şi* $m(\angle DBE) = 50°$*. Arătaţi că triunghiul EAC este echilateral.*

Manuela Prajea, Concursul Viitori Olimpici

Solutie 1:

Fie E' de aceeasi parte a lui AB ca si C astfel încât triunghiul ADE' sa fie isoscel si congruent cu BAC. Atunci $DE' \parallel BC$ formând unghiuri corespondente de 80° , $m(\angle ADE') = m(\angle ABC) = 80°$ si,deoarece triunghiul ABE' este isoscel obţinem că $m(\angle ABE') = \frac{180-80}{2} = 50°$. Aşadar E coincide cu E' de unde triunghiul AEC este isoscel (AE=AC) cu un unghi de 60°,($\angle CAE$) deci echilateral.



Solutie 2:

Fie E' de aceeasi parte a lui AB ca si C astfel încât triunghiul ACE' sa fie echilateral.Atunci $\triangle ADE' \equiv \triangle BAC(L.U.L.)$ şi de aici $m(\angle ADE') = m(\angle ABC) = 80°$ adică $DE' \parallel BC$.Înseamă că D,E si E' sunt coliniare şi, deoarece triunghiul BAE' este triunghi isoscel cu unghiul din vârf de $20 + 60 = 80°$, obţinem că $m(\angle ABE') = 50'$ deci E=E'. Aşadar triunghiul ACE este echilateral.

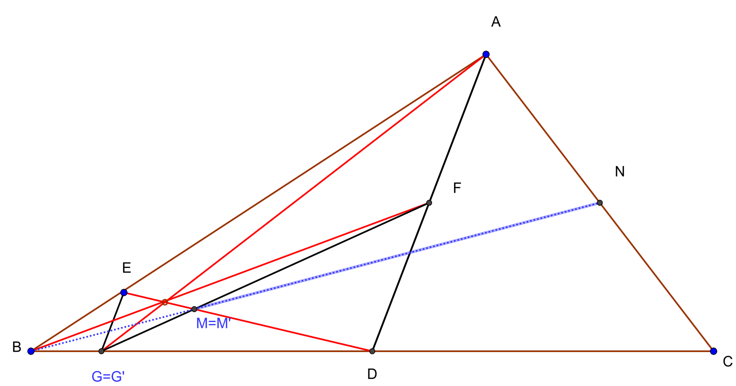
Problema 4

Fie triunghiul ABC , D mijlocul lui[BC], F mijlocul lui [AD] si N mijlocul lui [AC]. Se consideră punctele $E \in (AB), G \in (BD)$ şi $\{M\} = ED \cap GF$.Dacă puntele B,M şi N sunt coliniare, arătaţi că :

a) Dreptele EG şi AD sunt paralele;
b) Dreptele BF, DE, AG sunt concurente.

C. Manea , D. Petrică GM2/2012

Soluţie:



a) Fie $EG' \parallel AD, G' \in (BD)$ şi $\{M'\} = G'F \cap ED$. Ţinand cont ca FN este linie mijlocie din asemănările de triunghiuri obţinem $\frac{BG'}{2FN} = \frac{BG'}{DC} = \frac{BG'}{BD} = \frac{EG'}{AD} = \frac{EG'}{2FD} = \frac{G'M'}{2M'F}$ de unde $\frac{BG'}{FN} = \frac{G'M'}{M'F}$.
Dar $\angle BGM' \equiv \angle NFM'$(alterne interne) rezultă că $\triangle BG'M' \sim \triangle NFM'$(L.U.L.) şi atunci B,M' şi N sunt coliniare.

Aşadar M' este puntul de intersecţie al dreptelor ED si BN deci coincide cu M, apoi G=G'si în concluzie $EG \parallel AD$.

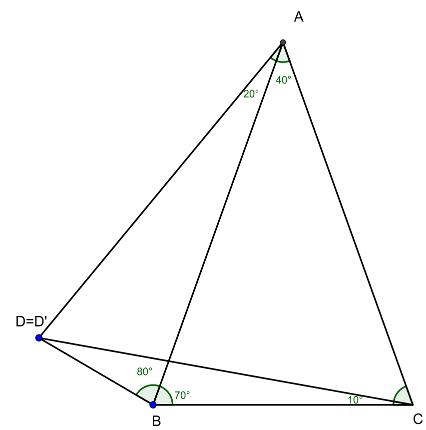
b) Se aplica reciproca teoremei lui Ceva deoarece $\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$

Problema 5

Fie triunghiul isoscel ABC cu AB=AC si $m(\angle BAC) = 40°$.În interiorul unghiului ACB se consideră un punct D astfel încât $m(\angle BCD) = 10°$ şi $m(\angle DBA) = 80°$. Aflaţi măsura unghiului $\widehat{DAB}$.

R Ghiţă,I Ghiţă , GM3/2012

Soluţie:



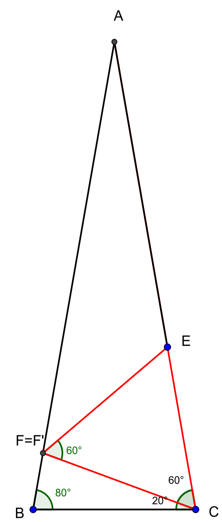
Fie D' in interiorul unghiului ACB astfel încât triunghiul AD'C sa fie echilateral.Atunci triunghiul AD'B este isoscel cu unghiul din vârf de 20° deci D,D' şi B sunt coliniare.Deasemenea obţinem că $m(\angle BCD') = 10°$ deci C,D şi D' sunt coliniare.
Aşadar D=D' si $m(\angle DAB) = 20°$.

<u>Problema 6</u>

În triunghiul isoscel ABC cu AB=AC si $m(\angle A) = 20°$ *fie* $E \in (AC$ *astfel încât* $m(\angle ABE) = 30°$ şi $F \in (AB)$ astfel încât EF=FC. Demonstraţi că triunghiul EFC este echilateral.

Marius Mâinea ,Concursul Arhimede 2007

Soluţie:
Fie $F' \in (AB)$ astfel încât$m(\angle BCF') = 20° \Longrightarrow \triangle BCF'$este isoscel $(m(\angle B) = 80°) \Longrightarrow CF' = CB$ (1)
Dar $\triangle EBC$ este isoscel (unghiurile congruente au 50°) de unde EC=BC (2).
Din 1) şi 2) obtinem ca EC=CF'. Dar întruât $m(\angle F'CE) = 60°$ rezultă că $\triangle EF'C$ este echilateral , rezultă că $F'E = F'C$ şi FE=FC . Aşadar F=F'(deoarece F si F' aparţin mediatoarei lui [EC] si laturii [AB])$\Longrightarrow \triangle EFC$ este echilateral.

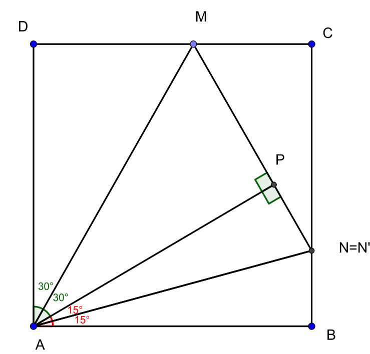


Problema 7

Fie $ABCD$ un patrat , iar $M \in (CD)$ astfel încât $m(\angle DAM) = 30°$. Bisectoarea unghiului $\angle AMC$ intersectează BC în N.Calculaţi $m(\angle MNA)$.

Gh.Szolosy, R.M.T. 2/2012

Soluţie:



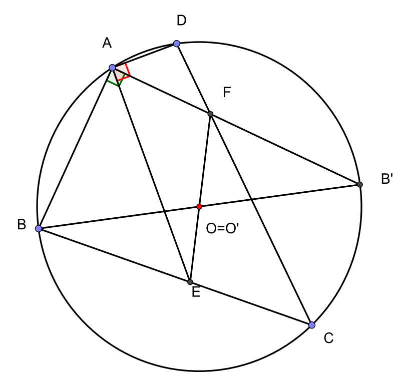
Fie $N' \in (BC)$ şi P' în interiorul pătratului astfel încât AP=AD , $m(\angle BAN') = m(\angle N'AP) = 15°$şi $m(\angle PAM) = 30°$. Atunci triunghiurile ADM şi APM respectiv BAN'şi AN'M sunt congruente (L.U.L.) de unde $m(\angle MPA) = m(\angle N'PA) = 90°$ şi $m(\angle AMP) = m(\angle AMD) = 60°$.Aşadar M,P şi N' sunt coliniare şi MN' este bisectoarea unghiului AMC. Rezultă că N=N' şi unghiul $\widehat{MNA}$ este de 75°.

Problema 8

Fie patrulaterul ABCD înscris în cercul $\mathcal{C}(O;R)$ cu $m(\widehat{BAD}) > 90^\circ$. Fie $E \in (BC)$ a.î. $AE \perp AD$ şi $F \in (CD)$ astfel încat $AF \perp AB$. Demonstraţi că punctele E,O,F sunt coliniare.

***

Soluţie:



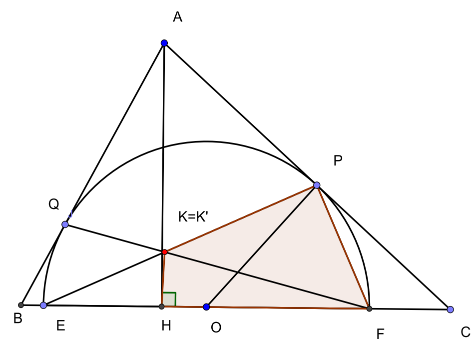
Fie B' punctul diametral opus lui B si O' intersecţia dreptelor BB'si EF.
Din teorema sinusurilor in triunghiurile ABE si ADF rezultă că $\frac{EB}{EA} = \frac{B'F}{FC}$.
Din teorema sinusurilor aplicată in triunghiurile BEO'si B'O'F rezultă $\frac{EB}{FB'} = \frac{O'B}{O'B'} \cdot \frac{\sin(\angle B'FO')}{\sin(\angle BEO')}$
Din teorema sinusurilor aplicată in triunghiurile AEF şi CEF rezultă $\frac{\sin(\angle B'FO')}{sin(\angle BEO')} = \frac{EA}{CF}$
Din ultimele doua relatii obţinem că $\frac{EB}{FB'} = \frac{O'B}{O'B'} \cdot \frac{EA}{CF}$.
Implicând şi prima relaţie deducem că O'B=O'B' deci O=O' adică E,O F coliniare.

Problema 9

Un semicerc de diametru EF aşezat pe latura BC a triunghiului ABC este tangent la AB şi AC în puntele Q respectiv P.Demonstraţi că punctul K , comun lui EP şi FQ, aparţine înălţimii din A a triunghiului ABC.

OBMJ 2000

Soluţie:
Fie H piciorul înălţimii din A şi K' intersecţia acesteia cu QF. Vom arăta ca E , K'şi P sunt coliniare de unde concluzia. Întradevăr daca O este mijlocul segmentului EF (centrul semicercului), O între H şi C, atunci patrulaterul AHOP este inscriptibil de unde $m(\angle AHP) = m(\angle AOP) = \frac{m(\angle QOP)}{2} = m(\angle QFP)$.Rezulta că patrulaterul K'HFP este inscriptibil de unde K'P este perpendiculară pe PC deci E , K'şi P sunt coliniare adica K'coincide cu K q.e.d.

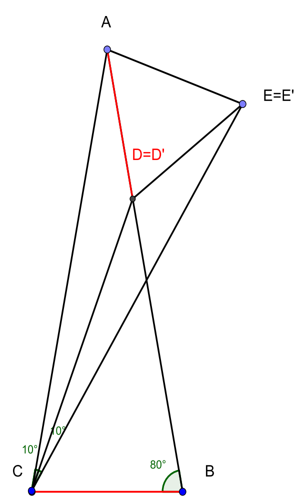


Problema 10

Pe latura (AB) a triunghiului isoscel ABC (AB=AC , $m(\angle A) = 20°$) se ia un punct D astfel încât AD=BC.În exteriorul triunghiului ABC se construieşte triunghiul echilateral ADE.Să se arate ca (CD este bisectoarea unghiului $\angle ACE$.

Concursul Cezar Ivanescu 2008

Soluţie:



Fie D' pe latura AB astfel încăt $m(\angle ACD') = 10°$ şi E'astfel încât triunghiul ADE'este echilateral.Atunci din congruenţa triunghiurilor AD'C si E'D'C (L.U.L.) rezulta ca (CE' este bisectoarea unghiului $\angle ACE'$ şi apoi că triunghiurile ABC si ACE' sunt congruente. Obţinem că AD'=BC de unde D=D', E=E'si concluzia problemei.

Probleme propuse

1.*Pe segmentul AC în semiplane diferite se construiesc triunghiurile isoscele ABC şi ADC, astfel încât* $m(\angle ADC) = 3m(\angle ACB)$*.Bisectoarea unghiului* $\widehat{BAC}$ *intersecteaza latura BC în puntul E. Segmentele [DE] şi [AC] se taie în punctul F.Demonstraţi că triunghiul CEF este isoscel.*

2.*Puntul M este situat în interiorul triunghiului isoscel ABC cu AB=AC şi* $m(\angle BAC) = 80°$*, astfel încât* $m(\angle MBC) = 30°$ şi $m(\angle MCB) = 10°$.Să se afle $m(\angle AMC)$.

3.*Fie un triunghi ABC,* $AB < AC$ *,* A_1 *şi D intersecţiile înălţimii , respectiv bisectoarei din A cu BC.Fie* B_1 *proiecţia lui B pe AD şi* C_1 *proiecţia lui D pe AC. Arătaţi că punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt coliniare.*

*****

4.*Se consideră pătratul ABCD şi punctele* $M \in (AB)$ *şi* $P \in (BC)$ *astfel încât AM=CP.Cercul de diametru DP intersectează (CM) în punctul S. Arătaţi că* $MS \perp BS$*.*

Manuela Prajea

5.*Se dă un pătrat ABCD şi două semidrepte cu originile în A şi B care traversează pătratul şi se intersectează în punctul E. Dacă* $m(\angle BAE) = m(\angle ABE) = 75°$*, atunci demonstraţi că triunghiul CDE este echilateral.*

Vasile Peiţa , Curtici RMT 4/2012

6.*Fie patrulaterul convex* $ABCD$ *şi punctele*$M \in (AB)$*,*$N \in (BC)$ *,*$P \in (CD), Q \in (DA)$ *astfel încât* $MP \cap QN = \{L\}$*. Dacă* $\frac{PD}{PC} = \frac{MA}{MB} = \alpha$ *şi* $\frac{QA}{QD} = \frac{NB}{NC} = \beta$ *atunci* $\frac{LQ}{LN} = \alpha$ *şi* $\frac{LM}{LP} = \beta$

****

7.*În patrulaterul convex ABCD fie O intersecţia diagonalelor si E intersecţia laturilor AD şi BC. Dacă* $m(\angle AEB) = 80°$ *şi AE=AC=2BE=2BD arătaţi că* $OE \perp AC$

Marius Mâinea

8.*În triunghiul isoscel ABC (AB =AC) ,*$m(\angle BAC) = 20°$ *fie BD bisectoarea unghiului ABC şi BE bisectoarea unghiului ABD(D şi E sunt pe (AC)).Dacă F este un punct pe (AB) astfel încât FE=ED să se afle măsura unghiului AFE.Câte soluţii are problema?*

Marius Mâinea

9. *Fie ABCD un trapez cu bazele AB şi CD . Construim triunghiurile echilaterale ASB şi DRC astfel ca punctele Aşi R să fie de aceeaşi parte a lui CD , iar punctele D şi S să fie de aceeaşi parte a lui AB. Să se arate că dreptele RS, AC şi BD sunt concurente.*

Nicolae Stanică GM 5, 2013

10. *În pătratul ABCD , M este mijlocul laturii [AB], N aparţine laturii (AD) astfel încât AN=2DN.Perpendiculara în M pe CM şi perpendiculara în N pe CN se intersectează în Q.Arătaţi că punctele că punctele A, Q şi C sunt coliniare.*

Concursul Dan Barbilian -2013

11. *Se consideră triunghiul ABC în care* $m(\angle B) = 40°$ *şi* $m(\angle C) = 30°$. *Pe latura (BC) se consideră punctele D şi E , astfel încât* $m(\angle DAB) = 40°$ *şi* $m(\angle EAC) = 30°$. *Fie G intersecţia paralelei prin D la dreapta AB cu latura (AC). Dacă* $\{J\} = AE \cap BG$, *arătaţi că* $[JB] \equiv [JC]$.

Bogdan Pisai -GMB 10 /2013

12. *Fie M un punct în interiorul pătratului ABCD astfel încât* $m(\angle DCM) = m(\angle MAC) = 25°$. *Aflaţi măsura unghiului ABM.*

Concursul Viitori Olimpici-Gazeta Matematică 2014-2015 cls a 8-a et a 1-a

13. *În triunghiul ascuţitunghic ABC ,cu* $AB \neq AC$, *D este piciorul bisectoarei interioare din A, iar E şi F picioarele înălţimilor din B respectiv C. Cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE se intersectează a doua oară în M. Arătaţi că ME=MF.*

V.O.-G.M. 2015-2016 cls a 8-a ,et a 2-a, Leo Giugiuc, Baraj Juniori 2013

14. *Se consideră triunghiul ABC , în care* $m(\angle B) = 30°, m(\angle C) = 15°$, *iar M este mijlocul laturii* $[BC]$. *Fie punctul* $N \in (BC)$ *astfel încât* $[NC] \equiv [AB]$. *Arătaţi că* $[AN$ *este bisectoarea unghiului* $\angle MAC$.

Sorana Ionescu-ONM 2016 cls a 7-a

15. *În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii* $[BC]$ *şi* $\measuredangle ACB = 15°$. *Ştiind că* $\measuredangle AMB = 45°$, *determinaţi* $\measuredangle BAC$.

ONM 2010,cls a 6-a

16. *În interiorul triunghiului ABC cu* $m(\angle A) = 100°$ *şi* $m(\angle B) = 20°$ *se consideră punctul D, astfel încât* $m(\angle DAB) = 30°$ *şi* $m(\angle DBA) = 10°$. *Determinaţi* $m(\angle ACD)$.

OJM 2017,cls a 6-a

17. *Fie M un punct în interiorul dreptunghiului ABCD, iar E, F mijloacele segmentelor [MC], respectiv [MD]. Dacă dreptele BE şi AF se intersectează în punctul P, demonstraţi că dreapta PM este perpendiculară pe AB .*

VO-2014-2015,cls a 7-a et a 2-a Andrei Eckstein

18. *Se consideră triunghiul echilateral* ABC *şi* X *un punct pe semidreapta*$(CA$ *astfel încât* $A \in (CX)$. *Pe bisectoarea unghiului* $\widehat{BAX}$ *se consideră punctul* D *iar pe semidreapta* $(AB$ *se consideră punctul* E *astfel încât* $AE + EC = DA + AC$. *Demonstraţi că semidreapta* $(CD$ *este bisectoarea unghiului* $\widehat{ACE}$.

ONM 2012 cls a 6-a

19. *Fie* ABC *un triunghi echilateral de latură 1. Pe latura* (BC) *construim în exterior un triunghi BDC astfel incat* $DB = DC$ *şi* $\measuredangle BDC = 120°$. *Pe laturile* (AB) *şi* (AC) *se consideră punctele* M *respectiv* N , *astfel incat* $\measuredangle MDN = 60°$. *Aflaţi perimetrul triunghiului* AMN.

VO 2016-2017 et 4 cls a 7-a pb 3

20. *În pătratul* $ABCD$ *se notează cu* M *mijlocul laturii* $[AB]$, *cu* P *proiecţia punctului B pe dreapta CM şi cu N mijlocul segmentului* $[CP]$. *Bisectoarea unghiului* $\widehat{DAN}$ *intersectează dreapta DP în punctul Q. Arătaţi că patrulaterul BMQN este paralelogram.*

ONM 2017 cls a 7-a pb 3

21. *Fie tringhiul scalen* ABC *si* $\Gamma(O)$ *cercul sau circumscris. Fie* M *mijlocul lui* $[BC]$ *şi* D *un punt pe* Γ *astfel încât* $AD \perp BC$.*Fie* T *astfel încât* $BDCT$ *este paralelogram şi* Q *un punct de aceeaşi parte a lui* BC *ca* A *astfel încât*

$$\angle BQM \equiv \angle BCA \text{ şi } \angle CQM \equiv \angle CBA$$

Dacă AO *intersectează* Γ *în* E *şi cercul* (ETQ) *intersectează* Γ *în punctul* $X \neq E$, *atunci* A, M *şi* X *sunt coliniare.*

JBMO 2017