PROPRIETĂŢILE PUNCTULUI LUI MATHOT

Punctul de plecare al acestui material este problema 3 de la barajul 3:

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, în care diagonalele se intersectează în X şi nu sunt perpendiculare. Fie A', C' proiecţiile lui A şi C pe BD şi B', D' proiecţiile lui B şi D pe AC. Arătaţi că:
a) perpendicularele duse din mijloacele laturilor pe latura opusă sunt concurente într-un punct M, numit *punctul lui Mathot*;
b) punctele A', B', C', D' sunt conciclice;
c) dacă O' este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, atunci O' este mijlocul segmentului determinat de ortocentrele triunghiurilor XAB şi XCD;
d) O' este punctul lui Mathot al patrulaterului $ABCD$.

Cu notaţiile din această problemă vă propun să demonstraţi alte proprietăţi ale punctului lui Mathot (numit uneori şi *anticentrul*):

1. Proiecţiile mijloacelor diagonalelor pe cealaltă diagonală trec şi ele prin M.

2. XM este perpendicular pe dreapta determinată de mijloacele diagonalelor.

3. Cercurile Euler ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA şi DAB sunt concurente în M.

4. Centrele celor patru cercuri Euler sunt conciclice. Cercul care trece prin aceste patru puncte este congruent cu cele patru cercuri Euler şi are centrul în M.

5. Cele patru drepte Simson construite proiectând câte unul din vârfurile A, B, C, D pe laturile triunghiului format din celelalte trei, trec toate prin M.

6. Ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA şi DAB sunt vârfurile unui patrulater congruent cu $ABCD$. (BMO 1984, pb 4)

În încheiere, două probleme de pe ShL JBMO 2013:

G.3., dată în concurs. Fie D un punct pe latura BC a unui triunghi ascuţitunghic ABC astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAO$, unde O este centrul cercului ω, circumscris triunghiului ABC. Fie E al doilea punct de intersecţie a dreptei AD cu ω, iar M, N, P mijloacele segmentelor $[BE]$, $[OD]$, respectiv $[AC]$. Demonstraţi că M, N, P sunt coliniare. (Macedonia)

(Cine este punctul lui Mathot în cazul unui patrulater inscriptibil ortodiagonal?)

G.6. Fie P şi Q mijloacele laturilor (BC), respectiv (CD) unui dreptunghi $ABCD$. Fie K şi M punctele de intersecţie ale dreptei PD cu QB şi respectiv QA, iar N punctul de intersecţie a dreptelor PA şi QB.
Fie X, Y, Z mijloacele segmentelor $[AN]$, $[KN]$, respectiv $[AM]$. Fie ℓ_1 dreapta care trece prin X şi este perpendiculară pe MK, ℓ_2 dreapta care trece prin Y şi este perpendiculară pe AM, ℓ_3 dreapta care trece prin Z şi este perpendiculară pe KN. Arătaţi că dreptele ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sunt concurente. (Cipru)