1. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_1x_2x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_{n+1}} \geq 4(1 - x_1x_2\ldots x_{n+1}).$$

The Mathematics Ashes, 2008[1]

Soluţie:
Notând $x_0 = 1$, avem

$$\frac{x_0x_1x_2\ldots x_{k-1}}{x_k} \geq 4x_0x_1x_2\ldots x_{k-1}(1 - x_k),$$

$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n+1$. Adunând aceste relaţii obţinem concluzia.

2. Se consideră un triunghi ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$. Demonstraţi că mediana din A a triunghiului AMP, mediana din B a triunghiului BNM şi mediana din C a triunghiului CPN sunt concurente dacă şi numai dacă dreptele AN, BP şi CM sunt concurente.

Marcel Chiriţă şi Mihai Piticari, ONM 1991, clasa a IX-a

Soluţie: Vom folosi
Teorema lui Ceva (forma cu sinusuri) Fie ABC un triunghi şi punctele A', B', C' pe laturile (BC), (CA) şi respectiv (AB) ale triunghiului. Atunci dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{\sin(\angle A'AC)}{\sin(\angle A'AB)} \cdot \frac{\sin(\angle B'BA)}{\sin(\angle B'BC)} \cdot \frac{\sin(\angle C'CB)}{\sin(\angle C'CA)} = 1.$$

Demonstraţie.
Conform variantei clasice a teoremei lui Ceva, dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

Exprimând cu ajutorul ariilor rapoartele care intervin în relaţia de mai sus, aceasta se scrie echivalent

$$\frac{\mathcal{S}(A'AC)}{\mathcal{S}(A'AB)} \cdot \frac{\mathcal{S}(B'BA)}{\mathcal{S}(B'BC)} \cdot \frac{\mathcal{S}(C'CB)}{\mathcal{S}(C'CA)} = 1,$$

sau încă

$$\frac{A'A \cdot AC \cdot \sin(\angle A'AC)}{A'A \cdot AB \cdot \sin(\angle A'AB)} \cdot \frac{B'B \cdot BA \cdot \sin(\angle B'BA)}{B'B \cdot BC \cdot \sin(\angle B'BC)} \cdot \frac{C'C \cdot CB \cdot \sin(\angle C'CB)}{C'C \cdot CA \cdot \sin(\angle C'CA)} = 1,$$

[1] Test de tip OIM dat echipelor Marii Britanii si Australiei cu câteva zile înainte de OIM

care, după simplificări revine la relaţia din enunţ.

Trecem acum la rezolvarea problemei.

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $[MP]$, $[MN]$, respectiv $[NP]$. Conform formei cu sinusuri a teoremei lui Ceva, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle A_1AB)} \cdot \frac{\sin(\angle B_1BA)}{\sin(\angle B_1BC)} \cdot \frac{\sin(\angle C_1CB)}{\sin(\angle C_1CA)} = 1. \qquad (1)$$

Deoarece AA_1 este mediană în triunghiul AMP, rezultă că $\mathcal{S}(A_1AM) = \mathcal{S}(A_1AP)$, adică $AM \cdot A_1A \cdot \sin(\angle A_1AM) = AP \cdot A_1A \cdot \sin(\angle A_1AP)$, adică $\dfrac{\sin(\angle A_1AC)}{\sin(\angle A_1AB)} = \dfrac{AM}{AP}$. Scriind şi relaţiile analoage şi înlocuind în (1) obţinem că relaţia (1) este echivalentă cu $\dfrac{AM}{AP} \cdot \dfrac{CP}{CN} \cdot \dfrac{BM}{BN} = 1$, ceea ce, din nou cu teorema lui Ceva (forma clasică), este echivalent cu faptul că dreptele AN, BP, CM sunt concurente.

3. Avem două cutii cu pietricele. Una conţine p pietricele, cealaltă q pietricele. Avem voie să facem următoarele două feluri de mutări: putem fie să scoatem câte o pietricică din fiecare cutie, fie să triplăm numărul de pietricele dintr-una din cutii.
a) Putem goli ambele cutii după o succesiune de mutări din cele două feluri dacă $p = 100$, $q = 200$? Dar dacă $p = 101$, $q = 200$?
b) Determinaţi perechile (p, q) de numere naturale nenule pentru care cele două cutii pot fi golite printr-o succesiune de mutări.

Concursul KöMaL, prelucrare

Soluţia 1.
a) Dacă $p = 100$, $q = 200$, cutiile pot fi golite astfel: mai întâi, de 50 de ori, scoatem câte o pietricică din ambele cutii. Ajungem la 50 de pietricele în prima cutie, 150 în cea de-a doua. Triplăm acum numărul de pietricele din prima cutie astfel încât vom avea câte 150 de pietricele în fiecare cutie. În fine, de 150 de ori, scoatem câte o pietricică din fiecare cutie golind astfel cele două cutii.
Dacă $p = 101$, $q = 200$ cutiile nu pot fi golite pentru că iniţial, numărul de pietricele din cele două cutii sunt două numere de paritate diferită (101 şi 200). Dacă la un moment dat, parităţile numerelor care reprezintă pietricelele din cele două cutii sunt diferite, atunci şi după efectuarea unei mutări parităţile vor rămâne diferite. Într-adevăr: dacă scoatem câte o pietricică din fiecare cutie schimbăm ambele parităţi, deci vom rămâne cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un număr impar de pietricele; dacă triplăm numărul de pietricele dintr-o cutie nu modificăm paritatea numărului de pietre din niciuna din cutii, deci vom rămâne iarăşi cu o cutie cu un număr par de pietricele şi cu cealaltă având un

număr impar de pietricele. Deoarece acest fapt rămâne invariant pe parcursul efectuării diverselor mutări, nu putem ajunge la situaţia în care ambele cutii să fie goale pentru că asta ar presupune că am putea ajunge să avem un număr par de pietricele (0 şi 0) în cele două cutii.
b) Argumentul de mai sus este valabil pentru orice pereche (p, q) de numere naturale nenule având parităţi diferite. Aşadar aceste perechi nu convin. Rămâne să studiem perechile (p, q) de numere naturale nenule având aceeaşi paritate. Vom arăta că în toate aceste situaţii putem goli cutiile. Putem presupune $p \leq q$. Dacă $p = q$ este evident că putem goli cutiile din p mutări din primul tip. Dacă $0 < p < q$, încercăm să facem în cazul general ceea ce am făcut în cazul $p = 100$, $q = 200$. Ar trebui să găsim un x astfel încât $3(p - x) = q - x$. Atunci, scoţând mai întâi câte x pietricele din fiecare cutie, triplând pietricelele din prima cutie, ajungem la câte $q - x$ pietricele în fiecare cutie, pietricele pe care le putem scoate din $q - x$ mutări. Ecuaţia de mai sus are soluţia $x = \dfrac{3p - q}{2}$. Cum $3p$ şi q au aceeaşi paritate, evident x este număr întreg. În plus, dacă $p \leq q$ atunci $x \leq p$, deci chiar putem scoate x pietricele din cele două cutii. Există însă o problemă: este posibil ca $x < 0$ dacă $3p < q$. Pentru a surmonta această problemă, mai întâi triplăm de $n \geq 0$ ori numărul de pietricele din cutia cu p pietricele până când avem în prima cutie $p' = 3^n p$ pietricele, cu $3^n p < q \leq 3^{n+1} p$. Acum putem scoate un anumit număr, $x \geq 0$, de pietricele din cele două cutii (repetând de x ori prima mutare), astfel încât în a doua cutie să rămână de trei ori mai multe pietricele decât în prima, adică astfel încât să avem

$$3(p' - x) = q - x.$$

Din ecuaţia de mai sus obţinem $x = \dfrac{3p' - q}{2} \in \mathbb{N}$. În plus, $x < p'$, deci operaţia de scoatere a câte unei pietricele din cele două cutii chiar poate fi repetată de x ori. Acum triplăm numărul de pietricele din prima cutie (care nu este goală). Obţinem câte $q - x$ pietricele în cele două cutii. Repetând de $q - x$ ori primul tip de mutare reuşim să golim cutiile.

Soluţia 2.
Ca mai sus se arată că dacă p, q au parităţi diferite atunci nu putem goli cutiile. Dacă p, q au aceeaşi paritate, cu $p \leq q$, scoate câte $p - 1$ pietricele din fiecare cutie şi ajungem la $(1,\ q - p + 1)$. Dacă $q - p + 1 = 1$ terminăm scoţând câte o pietricică din fiecare cutie, dacă nu, triplăm pietricelele din prima cutie, ajungând la $(3, q - p + 1)$. Scoatem de două ori câte o pietricică şi ajungem la $(1, q - p - 1)$. Dacă $q - p - 1 = 1$, scoatem câte o pietricică, dacă nu, triplăm şi scoatem câte două ajungând la $(1,\ q - p - 3)$, ş.a.m.d., până când $q - p - (2k + 1)$ devine 1. Atunci scoatem câte o pietricică şi am terminat.

4. Fie E şi respectiv F mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[CD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$ împart $ABCD$ în patru triunghiuri ale

căror arii sunt patru numere naturale consecutive.
Aflaţi aria maximă a triunghiului BAD.

Turneul Oraşelor, 2002

Soluţie. Fie n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ariile celor patru triunghiuri determinate de segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$. Deoarece E şi F sunt mijloace, avem $S[ABE] = S[ACE]$ şi $S[ACF] = S[ADF]$, de unde $S[AECF] = S[ACE] + S[ACF] = \frac{1}{2}S[ABC] + \frac{1}{2}S[ACD] = \frac{1}{2}S[ABCD] = \frac{n+n+1+n+2+n+3}{2} = 2n+3$.
În plus, triunghiurile ΔCEF şi ΔCBD sunt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, de unde $S[CEF] = \frac{1}{4}S[CBD] < \frac{1}{4}S[ABCD] = \frac{4n+6}{4}$. Deducem că $S[CEF] \in \{n,\ n+1\}$. Distingem două cazuri:
1. Dacă $S[CEF] = n$ atunci, din asemănarea de mai sus, $S[CBD] = 4n$, de unde $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n+6-4n = 6$.
2. Dacă $S[CEF] = n+1$ atunci $S[CBD] = 4(n+1)$, de unde rezultă că $S[BAD] = S[ABCD] - S[CBD] = 4n+6-4n-4 = 2$.
Aşadar, în aparenţă aria maximă căutată este $\max\{2,\ 6\} = 6$. Însă concluzia este pripită atâta timp cât nu am demonstrat că primul caz este într-adevăr posibil. Acest lucru se poate vedea făcând efectiv construcţia unui patrulater $ABCD$ pentru care $S[BAD] = 6$. Iată construcţia:
Observăm că ar trebui să construim un patrulater $AECF$ astfel ca $S[CEF] = n$, $S[AEF] = n+3$, $S[AEC] = n+1$ şi $S[AFC] = n+2$. Apoi punctele B, D vor fi simetricele lui C faţă de E, respectiv F. Dacă notăm $\{O\} = AC \cap EF$, trebuie ca $\frac{AO}{CO} = \frac{n+3}{n}$ şi $\frac{EO}{FO} = \frac{n+1}{n+2}$. O să construim chiar un patrulater ortodiagonal cu aceste proprietăţi. Considerăm două drepte perpendiculare care se taie într-un punct O. Pe prima dreaptă considerăm punctele A şi C astfel ca $O \in (AC)$, $AO = (n+3)x$, $CO = nx$, cu x ce va fi ales convenabil în cele ce urmează. Pe cealaltă dreaptă considerăm punctele E şi F astfel ca $O \in (EF)$, $EO = (n+1)x$ şi $FO = (n+2)x$. Un calcul simplu arată că pentru a obţine ariile dorite trebuie să alegem $x = \sqrt{\frac{2}{2n+3}}$. Aşadar se poate construi un patrulater $ABCD$ în care ariile triunghiurilor CEF, ABE, ADF, AEF sunt patru numere naturale consecutive şi $S[BAD] = 6$, prin urmare valoarea 6 chiar se poate obţine şi, după cum am văzut mai sus, această valoare este cea mai mare valoare posibilă.

5. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ de pe axa numerelor sunt capetele a 50 de segmente, fiecare din numerele $1, 2, 3, \ldots, 100$ fiind capăt pentru unul din segmente.
Demonstraţi că printre cele 50 de segmente există fie două de lungimi egale, fie două care au suma lungimilor egală cu 100.

Revista Kvant, prelucrare

Soluţie.
Presupunem că ar fi posibil ca printre cele 50 de segmente să nu fie nici segmente de aceeaşi lungime, nici segmente cu suma lungimilor 100. Lungimile posibile de segmente sunt $1, 2, 3, \ldots, 99$. Împărţim segmentele în mulţimi astfel:
A_1 = mulţimea segmentelor de lungime 1 sau 99;
A_2 = mulţimea segmentelor de lungime 2 sau 98;
A_3 = mulţimea segmentelor de lungime 3 sau 97;
....
A_{49} = mulţimea segmentelor de lungime 49 sau 51;
A_{50} = mulţimea segmentelor de lungime 50.
Dacă am avea două din cele 50 de segmente într-o aceeaşi mulţime atunci aceste două segmente ar avea fie aceeaşi lungime, fie suma lungimilor egală cu 100, ceea ce ar contrazice presupunerea făcută la început. Trebuie aşadar să avem exact un segment în fiecare mulţime. Deoarece mulţimile A_1, A_3, A_5, ..., A_{49} conţin segmente de lungime impară, în vreme ce mulţimile A_2, A_4, A_6, ..., A_{50} conţin numai segmente de lungime pară, printre cele 50 de segmente vor fi 25 cu lungima impară şi 25 cu lungimea pară.
Să examinăm acum paritatea capetelor unui segment de lungime pară, respectiv impară. Un segment de lungime pară are capetele de aceeaşi paritate, în vreme ce un segment de lungime impară are capetele de parităţi diferite. Aşadar cele 25 de segmente de lungime impară folosesc 25 de numere pare şi 25 de numere impare, urmând ca celelalte 25 de numere pare şi celelalte 25 de numere impare să fie folosite la segmentele de lungime pară. Dar 25 de numere pare nu pot fi legate folosind numai segmente de lungime pară, deci presupunerea iniţială duce la o contradicţie, prin urmare ea este falsă.